

**ADENILDO DE CARVALHO CORRÊA**

**MODELAGEM DE MOTORES TRIFÁSICOS DE  
INDUÇÃO ALIMENTADOS POR REDE  
MONOFÁSICA**

**FLORIANÓPOLIS**

**2003**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**MODELAGEM DE MOTORES TRIFÁSICOS DE  
INDUÇÃO ALIMENTADOS POR REDE  
MONOFÁSICA**

Dissertação submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica

**ADENILDO DE CARVALHO CORRÊA**

Florianópolis, Agosto de 2003.

# MODELAGEM DE MOTORES TRIFÁSICOS DE INDUÇÃO ALIMENTADOS POR REDE MONOFÁSICA

Adenildo de Carvalho Corrêa

‘Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

---

João Pedro Assumpção Bastos, Dr.  
Orientador

---

Edson Roberto de Pieri, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

---

João Pedro Assumpção Bastos, Dr.  
Presidente

---

Nelson Sadowski, Dr.

---

Patrick Kuo-Peng, Dr.

---

Nelson Jhoe Batistela, Dr.

---

Roberto de Souza Salgado, Ph.D.

*Aos meus pais,  
que, entre tantas,  
me deram a maior  
oportunidade de todas:  
viver*

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador, professor João Pedro Assumpção Bastos, e ao meu co-orientador, professor Nelson Sadowski, pela orientação neste trabalho e pelo apoio e compreensão.

Aos funcionários da UFSC, em especial aos funcionários do GRUCAD e da secretaria do Departamento de Engenharia Elétrica, pela solicitude e eficiência.

À WEG Indústrias S.A., pela permissão em utilizar seus laboratórios.

Aos colegas de trabalho Emerson Hamerschmitt e Carlos Lourenço, pelo apoio.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

## **MODELAGEM DE MOTORES TRIFÁSICOS DE INDUÇÃO ALIMENTADOS POR REDE MONOFÁSICA**

**Adenildo de Carvalho Corrêa**

Agosto/2003

Orientador: João Pedro Assumpção Bastos, Dr.

Área de Concentração: Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos.

Palavras-chave: Motor Trifásico de Indução, Redes Monofásicas, Modelo de Park.

Número de páginas: 69.

Este trabalho apresenta um método para análise de motores trifásicos de indução alimentados por rede monofásica, mais especificamente o caso de um motor normal conectado à rede monofásica através da utilização de capacitores. O método consiste na aplicação da teoria dos eixos de referência em conjunto com as teorias clássicas de circuitos elétricos para a solução das equações de tensão e torque do motor elétrico de indução. Também é apresentado um método alternativo baseado na aplicação da teoria de circuitos elétricos diretamente nas equações de espaço-estado em variáveis de máquina. Para a solução das equações definidas nos modelos foi utilizado o software Scilab. Para a validação do modelo foram realizados ensaios com um motor 1,5 kW, 4 pólos e três diferentes valores de capacitância: 15  $\mu\text{F}$ , 27  $\mu\text{F}$  e 60  $\mu\text{F}$ .

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

# **MODELING THREE-PHASE INDUCTION MOTORS FED BY SINGLE-PHASE SOURCE**

**Adenildo de Carvalho Corrêa**

Agosto/2003

Advisor: João Pedro Assumpção Bastos, Dr.

Area of Concentration: Conception and Analysis of Electromagnetic Devices.

Keywords: Three-Phase Induction Motor, Single-Phase Sources, Park's Model.

Number of Pages: 69.

This work presents a method to analyze three-phase induction motors fed by single-phase sources, specially the case of a standard motor connected to the single-phase source using capacitors. The method consists in applying the reference frame theory in addition to the classic electric circuit theories to solve the voltage and torque equations of the electric induction motor. It also presents an alternative method based on the use of the electric circuit theory directly applied to the state-space equations in machine variables. To solve these equations the Scilab software was used. To validate the model, tests were performed using a 1,5 kW, 4-pole motor and three different capacitors: 15  $\mu\text{F}$ , 27  $\mu\text{F}$  e 60  $\mu\text{F}$ .

# SUMÁRIO

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. INTRODUÇÃO</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1.1. Formas de utilização</b>                                | <b>2</b>  |
| 1.1.1. Motor trifásico de prateleira em ligação SEMIHEX™        | 2         |
| 1.1.2. Motor assimétrico com capacitor                          | 3         |
| 1.1.3. Partida monofásica de motores trifásicos                 | 7         |
| 1.1.4. Motor monofásico de prateleira com capacitor             | 8         |
| <b>1.2. Objetivo do trabalho e seu desenvolvimento</b>          | <b>9</b>  |
| <b>2. MODELO MATEMÁTICO DO MOTOR DE INDUÇÃO</b>                 | <b>10</b> |
| 2.1. Hipóteses Simplificadoras                                  | 10        |
| 2.2. Equações de tensão e torque do motor de indução            | 12        |
| <b>3. A TEORIA DOS EIXOS DE REFERÊNCIA</b>                      | <b>17</b> |
| 3.1. A transformada $dq0$                                       | 17        |
| 3.2. A transformada aplicada a circuitos estacionários          | 18        |
| 3.3. A transformada aplicada aos circuitos do rotor             | 21        |
| 3.4. Equações de tensão do motor em variáveis $dq0$             | 22        |
| 3.5. Equações de torque em variáveis $dq0$                      | 28        |
| <b>4. EXTENSÃO DO MODELO PARA REDE MONOFÁSICA</b>               | <b>29</b> |
| 4.1. Modelo utilizando a teoria dos Eixos de Referência         | 29        |
| 4.2. Modelo utilizando as equações de espaço-estado             | 33        |
| <b>5. SIMULAÇÃO</b>   | <b>36</b> |
| 5.1. Simulações utilizando a teoria dos eixos de referência     | 36        |
| 5.2. Simulações utilizando as equações de espaço-estado         | 38        |
| <b>6. VALIDAÇÃO DO MODELO</b>                                   | <b>39</b> |
| <b>7. CONCLUSÕES</b>  | <b>56</b> |
| <b>8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>                            | <b>57</b> |
| <b>9. APÊNDICE</b>  | <b>58</b> |
| <b>9.1. Simulação através da teoria dos eixos de referência</b> | <b>58</b> |
| 9.1.1. Parâmetros do motor de indução trifásico e da carga      | 58        |
| 9.1.2. Programa de simulação                                    | 59        |
| 9.1.3. Equações dos enlaces de fluxo                            | 63        |
| 9.1.4. Equações da velocidade                                   | 64        |
| 9.1.5. Equação da tensão no capacitor                           | 64        |
| <b>9.2. Simulação em variáveis de máquina</b>                   | <b>64</b> |
| 9.2.1. Parâmetros do motor de indução trifásico                 | 64        |
| 9.2.2. Programa de simulação                                    | 65        |
| 9.2.3. Equações do motor  | 66        |
| 9.2.4. Cálculo do torque  | 68        |



## 1. INTRODUÇÃO

A utilização de motores trifásicos em rede monofásica de alimentação deve-se ao fato de existirem lugares, especialmente zonas rurais, onde não se tem disponível ou é economicamente inviável a instalação de uma rede trifásica de alimentação. Observe-se a eventual necessidade de potências maiores do que aquelas hoje disponíveis para motores monofásicos. A maioria dos fabricantes de motores elétricos produz motores monofásicos de até 15 cv. Além disso, os motores monofásicos são mais caros e volumosos que os motores trifásicos de mesma potência, como pode ser visto na Tabela 1.1.

| Pólos | Potência<br>[cv] | Motor Trifásico |               | Motor Monofásico |               | Fator de<br>Custo<br>Relativo |
|-------|------------------|-----------------|---------------|------------------|---------------|-------------------------------|
|       |                  | Carcaça         | Massa<br>[kg] | Carcaça          | Massa<br>[kg] |                               |
| II    | 1,5              | 80              | 14            | 90S              | 26            | 2,14                          |
|       | 7,5              | 112M            | 43            | W132S            | 54            | 2,05                          |
|       | 12,5             | 132M            | 67            | 132M/L           | 81            | 1,69                          |
| IV    | 1,5              | 80              | 16            | 90L              | 30            | 2,25                          |
|       | 7,5              | 112M            | 46            | 132M             | 65            | 1,95                          |
|       | 12,5             | 132M            | 66            | 132M/L           | 90            | 1,92                          |

*Tabela 1.1. Comparação de custo e massa entre motores trifásicos e monofásicos.*

*(Carcaças segundo a norma IEC.)*

O valor apresentado na coluna Fator de Custo Relativo é o custo do motor monofásico dividido pelo custo do motor trifásico correspondente (de mesma potência e polaridade). A carcaça representa o tamanho do motor. A parte numérica da carcaça indica a altura em milímetros da base dos pés até o centro do eixo e as letras S, M e L representam o comprimento da mesma (S para carcaça curta, M para média e L para longa). A letra W indica um motor com pé alto, ou seja, o pé do motor é mais alto que o normal para que uma carcaça de altura inferior possa ser usada no lugar de uma superior. Por exemplo, a carcaça W132 é na verdade uma carcaça 112 com pés mais altos para que a altura da base dos pés até o centro do eixo dê exatamente 132 mm.

## 1.1. Formas de utilização

Um motor trifásico de indução pode ser utilizado em rede monofásica de alimentação de diversas formas:

- motor de “prateleira” em ligação SEMIHEX™;
- motor assimétrico com capacitor;
- partida monofásica de motores trifásicos;
- motor de “prateleira” com capacitor.

Essas formas de utilização serão detalhadas a seguir.

### 1.1.1 Motor trifásico de prateleira em ligação SEMIHEX™

A ligação SEMIHEX™, mostrada na Figura 1.1, é uma ligação especial somente possível com motores que possuem 6 ou 12 cabos e que utiliza dois capacitores permanentes para permitir a utilização de motores trifásicos comuns em rede monofásica de alimentação.

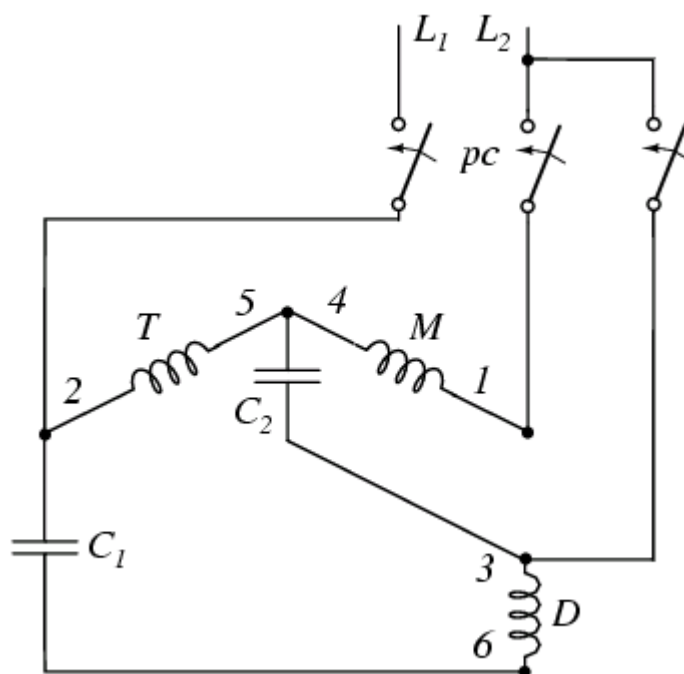


Figura 1.1. Conexão SEMIHEX™.

Otto Smith, da Smith & Sun, patenteou nos Estados Unidos esta forma de conexão que permite a utilização de motores comuns em redes monofásicas. As vantagens desta conexão [7] são uma maior faixa de potências disponível (a Smith & Sun já possui em operação um motor de 40HP e afirma que seu dispositivo é economicamente viável, em comparação com conversores monofásicos, até uma potência de 100HP), um alto valor de rendimento e um alto fator de potência. SMITH [7] afirma também que o motor utilizado com seu dispositivo tem operação silenciosa e livre de vibrações.

Nesta conexão os capacitores são escolhidos de forma que os enrolamentos sejam percorridos pela corrente nominal e com o fator de potência nominal. Assim sendo, as tensões e correntes no enrolamento são balanceadas [7].

### 1.1.2. Motor assimétrico com capacitor.

Os motores assimétricos são aqueles que possuem um número de espiras diferente para cada fase. Essa assimetria é utilizada para reduzir oscilações no torque. O motor assimétrico pode ser obtido de um motor simétrico pela alteração do número de espiras, não havendo necessidade de se alterar estruturalmente o motor, como, por exemplo, alterar o número de ranhuras, mas o mesmo terá que ser rebobinado.

Neste tipo de operação, o motor é conectado à rede de alimentação como mostra a Figura 1.2.

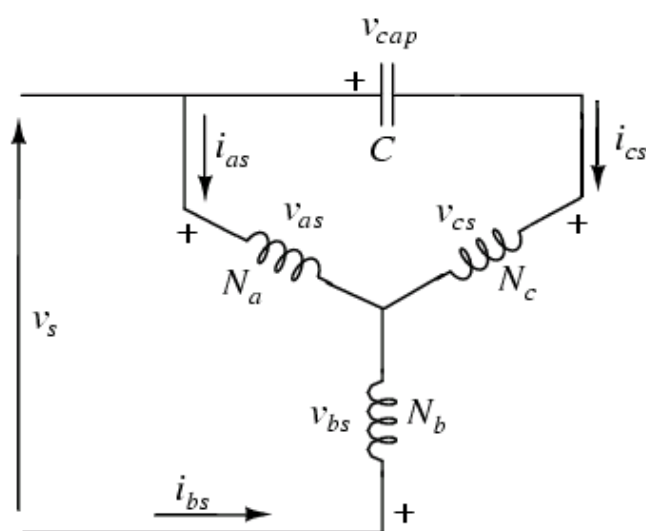


Figura 1.2. Diagrama esquemático do motor de indução trifásico assimétrico [4].

Do diagrama esquemático mostrado na Figura 1.2 pode-se perceber as seguintes relações, que serão utilizadas posteriormente no desenvolvimento dos modelos matemáticos do motor trifásico de indução alimentado por rede monofásica:

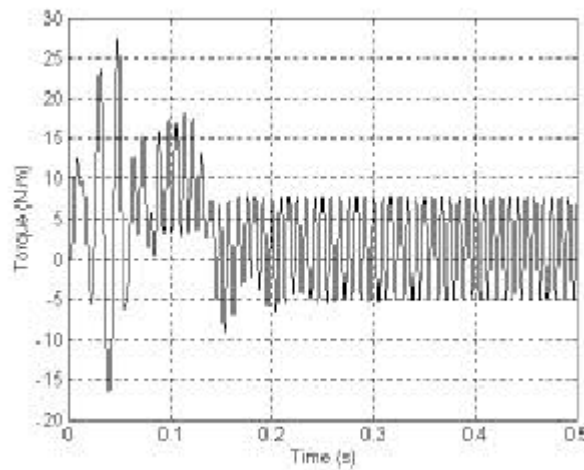
$$\frac{dv_{cap}}{dt} = \frac{1}{C} i_{cs} \quad (1.1)$$

$$i_{bs} = -(i_{as} + i_{cs}) \quad (1.2)$$

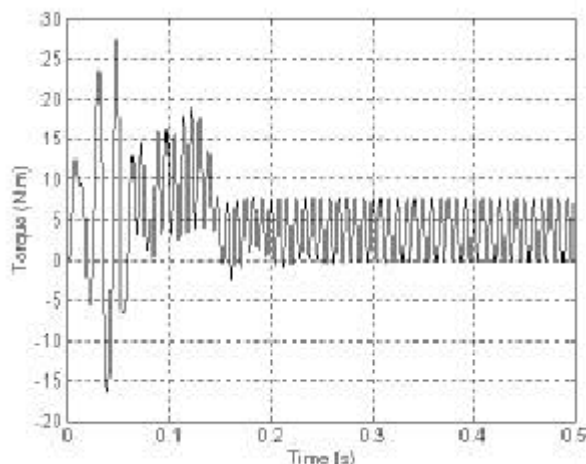
$$v_s = v_{as} - v_{bs} \quad (1.3)$$

Para que em operação o motor não apresente muita oscilação no torque, o valor do capacitor deve ser variado conforme a condição de carga. As figuras 1.3, 1.4 e 1.5, retiradas do trabalho realizado por DE MENDONÇA et al. [8], mostram as oscilações que ocorrem quando o capacitor é mantido no valor ótimo para a condição nominal e a carga é variada.

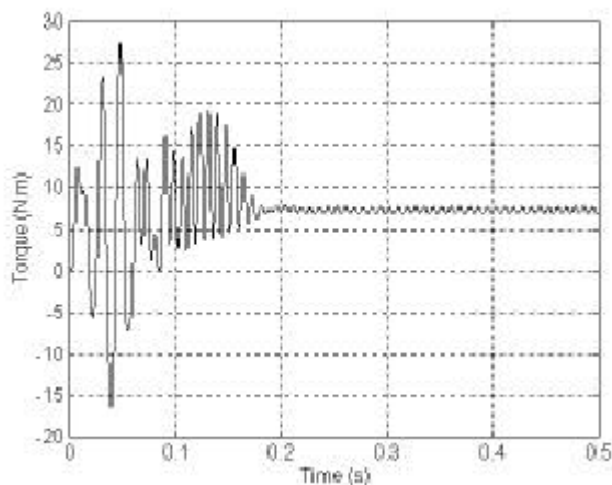
Como pode ser percebido dessas figuras, quanto mais a carga se distancia do ponto de operação para o qual o capacitor foi escolhido, mais as oscilações se acentuam.



*Figura 1.3. Curva de torque do motor assimétrico com 20% de carga [8].*



*Figura 1.4. Curva de torque do motor assimétrico com 50% de carga [8].*



*Figura 1.5. Curva de torque do motor assimétrico com 100% de carga [8].*

Porém, projetar um motor assimétrico não se limita à escolha do capacitor. Há também que se escolher o número de espiras de cada fase ( $N_a$ ,  $N_b$  e  $N_c$ ). Isto implica em um grande número de possibilidades. Como parâmetro de projeto, escolhe-se combinações nas quais o desbalanceamento seja o menor possível, de forma que as características de torque, potência e velocidade não sejam muito afetadas em relação ao motor simétrico correspondente.

Existem aqui duas comparações a serem feitas: uma entre o motor assimétrico e o motor simétrico correspondente, e outra entre o motor assimétrico e o motor monofásico que o motor simétrico pretende substituir. Com relação à primeira comparação, que pode ser vista na Tabela 1.2, tomou-se dois motores de 2HP, 4 pólos, um simétrico e outro assimétrico obtido do primeiro pela mudança no número de espiras de duas de suas fases.

Na segunda comparação, mostrada na Tabela 1.3, utiliza-se um motor assimétrico

alimentado por uma rede monofásica, um motor monofásico com capacitor de partida e um motor monofásico com capacitor permanente. Os motores possuem a potência nominal de 2 cv.

|                      | Motor Simétrico | Motor Assimétrico |
|----------------------|-----------------|-------------------|
| Potência [HP]        | 2,0             | 2,0               |
| Tensão [V]           | 380/220         | 380               |
| Corrente [A]         | 3,99/6,99       | 5,0               |
| Frequência [Hz]      | 60              | 60                |
| Rotação [rpm]        | 1720            | 1720              |
| Torque [Nm]          | 7,9             | 7,3               |
| Ip/In                | 6,8             | -                 |
| Classe de Isolamento | B               | B                 |
| Fator de Potência    | 0,78            | 0,94              |
| Fator de Serviço     | 1,15            | -                 |

*Tabela 1.2 – Comparação entre o motor assimétrico e o motor simétrico original [4].*

|                   | Motor<br>Assimétrico<br>Em Rede<br>Monofásica | Motor<br>Monofásico<br>com Capacitor<br>de Partida | Motor<br>Monofásico<br>com Capacitor<br>Permanente |
|-------------------|---|--|--|
| Tensão [V]        | 380   | 220  | 220  |
| Corrente [A]      | 4,22  | 10,0   | 7,28   |
| Fator de Potência | 0,97  | 0,74   | 0,92   |
| Torque [N.m]      | 7,03  | 7,28   | 7,17   |
| Rotação [rpm]     | 1733  | 1737   | 1765   |
| Rendimento [%]    | 83,5  | 78,5   | 88,0   |

*Tabela 1.3 – Comparação entre um motor assimétrico utilizado em rede monofásica, um motor monofásico com capacitor de partida e um motor monofásico com capacitor permanente [5].*

Pode-se perceber pelo mostrado na Tabela 1.3 que o motor trifásico assimétrico

possui rendimento e fator de potência semelhantes aos do motor monofásico com capacitor permanente e melhores que o motor monofásico com capacitor de partida. A diminuição no torque é pequena.

A desvantagem deste tipo de motor é o fato de ele ser assimétrico (diferentes números de espiras em cada fase), o que faz com que o motor ou tenha que ser rebobinado a partir de um motor normal ou tenha que ter uma linha de montagem específica. Isto encarece o produto.

### 1.1.3. Partida monofásica de motores trifásicos.

Apesar de não ser uma forma tradicional de uso de motor trifásico em rede de alimentação monofásica, é interessante mostrar a técnica de partida monofásica de motor trifásico com a conexão mostrada na Figura 1.6. Embora o motor opere normalmente alimentado por rede trifásica, durante a partida ele é alimentado por dois condutores apenas.

O motor parte com a chave na posição *pa*, com o capacitor conectando dois de seus terminais e alimentado somente por dois terminais. Após atingir uma certa velocidade, o capacitor é desconectado, com a chave passando para a posição *op*, e o motor passa a funcionar como um motor trifásico normal.

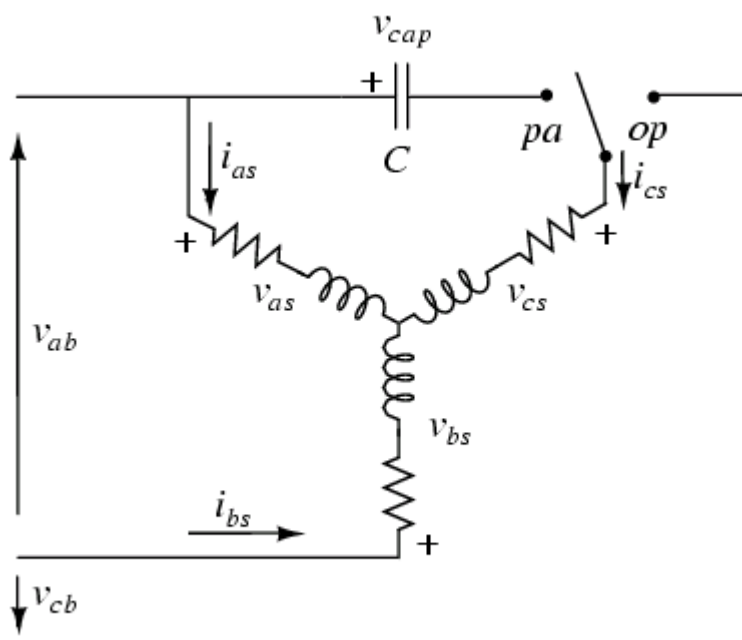


Figura 1.6. Partida monofásica de motores trifásicos.

Este método de partida pode reduzir em até 80% o tempo de aceleração de motores grandes. Porém é importante notar que, durante a partida, período em que o motor está conectado como um motor monofásico, podem ocorrer desbalanceamentos nas correntes de alimentação e sobre-correntes em certas fases. Note-se também que haverá pulsação do torque com o dobro da frequência de alimentação. Mas é importante perceber que isto ocorrerá em um período curto, que corresponde à partida do motor.

Pode-se escolher o capacitor para se obter mínimo desbalanceamento, máximo rendimento, máximo fator de potência ou máximo torque [3]. Como o que importa neste caso é uma partida mais rápida, o capacitor é escolhido para se obter o máximo torque.

#### 1.1.4. Motor trifásico de prateleira com capacitor.

Neste caso o motor é conectado à rede monofásica como mostra a Figura 1.7. A forma de conexão é a mesma que a utilizada para o motor assimétrico. A diferença é que o motor utilizado é um motor comum, sem qualquer alteração.

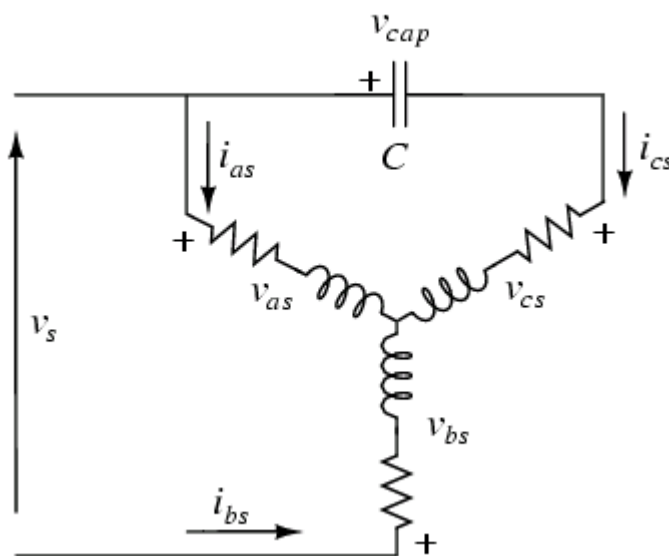


Figura 1.7. Motor trifásico comum alimentado por rede monofásica.

Este será o caso estudado neste trabalho e detalhado a seguir. Este caso foi escolhido para estudo por ser de simples implementação, pois utiliza um motor normal sem alterações e apresentar um baixo custo, pois soma-se ao custo do motor somente o custo de um capacitor (ou de uma associação de capacitores).



Primeiramente será apresentada a modelagem do motor trifásico de indução utilizando-se a teoria dos eixos de referência, modelo este que será posteriormente adaptado para o uso da rede monofásica e a inclusão do capacitor. Será também apresentado um modelo alternativo baseado nas equações de tensão e torque do motor de indução trifásico e da teoria clássica de circuitos elétricos.

## **1.2. Objetivo do trabalho e seu desenvolvimento**

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo matemático que permita analisar o comportamento do motor de indução trifásico alimentado por rede monofásica conectado conforme mostrado na Figura 1.7.

No capítulo 2 são apresentadas sucintamente as equações diferenciais clássicas de tensão e torque do motor de indução trifásico, bem como as simplificações adotadas.

No capítulo 3 é apresentada a teoria dos eixos de referência que permite simplificar as equações do motor.

A seguir, no capítulo 4, sub-capítulo 4.1, o modelo utilizando a teoria dos eixos de referência para o motor de indução é estendido de forma a acomodar a inclusão do capacitor e a aplicação da tensão monofásica, ou seja, são introduzidos agentes de desbalanceamento no sistema anteriormente balanceado. Um modelo alternativo é apresentado no sub-capítulo 4.2. Este modelo não utiliza a teoria dos eixos de referência, mas somente as equações clássicas em variáveis de máquina. Entenda-se aqui variáveis de máquina como sendo as variáveis originais do motor, sem a aplicação da teoria dos eixos de referência, cujas grandezas são conhecidas como variáveis  $dq0$  (devido aos eixos direto e em quadratura que formam a referência).

O capítulo 5 mostra a forma como foram feitas as simulações.

No capítulo 6 são mostrados os resultados dos ensaios realizados para a validação do modelo. A eficácia e as limitações do modelo são também apresentadas.

As conclusões do trabalho são apresentadas no capítulo 7.

## 2. MODELO MATEMÁTICO DO MOTOR DE INDUÇÃO.

Neste capítulo é apresentado o modelo matemático do motor de indução trifásico. Nele, os índices  $s$  e  $r$  indicam variáveis do estator e do rotor, respectivamente, e os índices  $a$ ,  $b$  e  $c$ , as respectivas fases, tanto do estator como do rotor.

A este modelo será aplicada a teoria dos eixos de referência para a obtenção do modelo em variáveis  $dq0$ , mostrado no capítulo seguinte.

Este modelo também será utilizado para a obtenção do modelo alternativo apresentado no Capítulo 4, sub-capítulo 4.2.

### 2.1. Hipóteses simplificadoras

Para efeito de estudo, foram feitas as seguintes considerações [1,2]:

- § Os três enrolamentos do estator são iguais, dispostos a  $120^\circ$  uns dos outros, com o mesmo número de espiras  $N_s$  senoidalmente distribuídas e a mesma resistência  $r_s$ .
- § Os enrolamentos do rotor serão também considerados como sendo três enrolamentos iguais, dispostos a  $120^\circ$  uns dos outros, com o mesmo número equivalente de espiras  $N_r$  senoidalmente distribuídas e com a mesma resistência  $r_r$ . Para os motores com rotor em gaiola, o enrolamento uniformemente distribuído do rotor pode ser adequadamente descrito pela sua componente senoidal fundamental e representado por um enrolamento trifásico equivalente [2].
- § Não há saturação e perdas magnéticas.
- § O entreferro é constante.
- § A distribuição do fluxo magnético é radial e senoidal.

Levando-se em consideração as simplificações acima, pode-se afirmar que:

a) As indutâncias próprias dos enrolamentos do estator são constantes e iguais entre si, e podem ser escritas como a soma de suas indutâncias de dispersão  $L_{ls}$  e de suas indutâncias de magnetização  $L_{ms}$ :

$$L_{ss} = L_{asas} = L_{bsbs} = L_{cs cs} = L_{ls} + L_{ms} \quad (2.1)$$

b) As indutâncias próprias dos enrolamentos do rotor são constantes e iguais entre si, podendo ser escritas como sendo a soma de suas indutâncias de dispersão  $L_{lr}$  e de suas

indutâncias de magnetização  $L_{mr}$ :

$$L_{rr} = L_{arar} = L_{brbr} = L_{cr cr} = L_{lr} + L_{mr} \quad (2.2)$$

c) As indutâncias mútuas entre os enrolamentos do estator são iguais entre si.

$$M_{ss} = L_{asbs} = L_{asc s} = L_{bsas} = L_{bscs} = L_{csas} = L_{csbs} = - 0,5 L_{ms} \quad (2.3)$$

O sinal negativo da indutância mútua entre os enrolamentos do estator advém do fato de que ao se decompor o fluxo gerado pelo enrolamento de uma fase do estator ao longo do eixo do fluxo gerado pelo enrolamento de outra fase do estator, esta componente terá sentido contrário ao fluxo gerado pelo enrolamento desta última fase. O valor 0,5 deve-se ao fato de que a componente, devido à disposição em  $120^\circ$  entre os enrolamentos, é metade do fluxo original. Estas relações podem ser percebidas mais facilmente analisando-se a Figura 2.1. Nela estão representados, esquematicamente, os enrolamentos do estator e do rotor, bem como os eixos de seus enrolamentos. O sentido do eixo é dado pela regra da mão direita. Tomando-se como exemplo os enrolamentos das fases *a* e *b*, e sabendo-se que o ângulo entre seus eixos é de  $120^\circ$ , a projeção do fluxo produzido pelo enrolamento da fase *b* em relação ao fluxo produzido pela fase *a* é  $\cos 60^\circ$ , ou 0,5, e em sentido contrário, daí o sinal negativo.

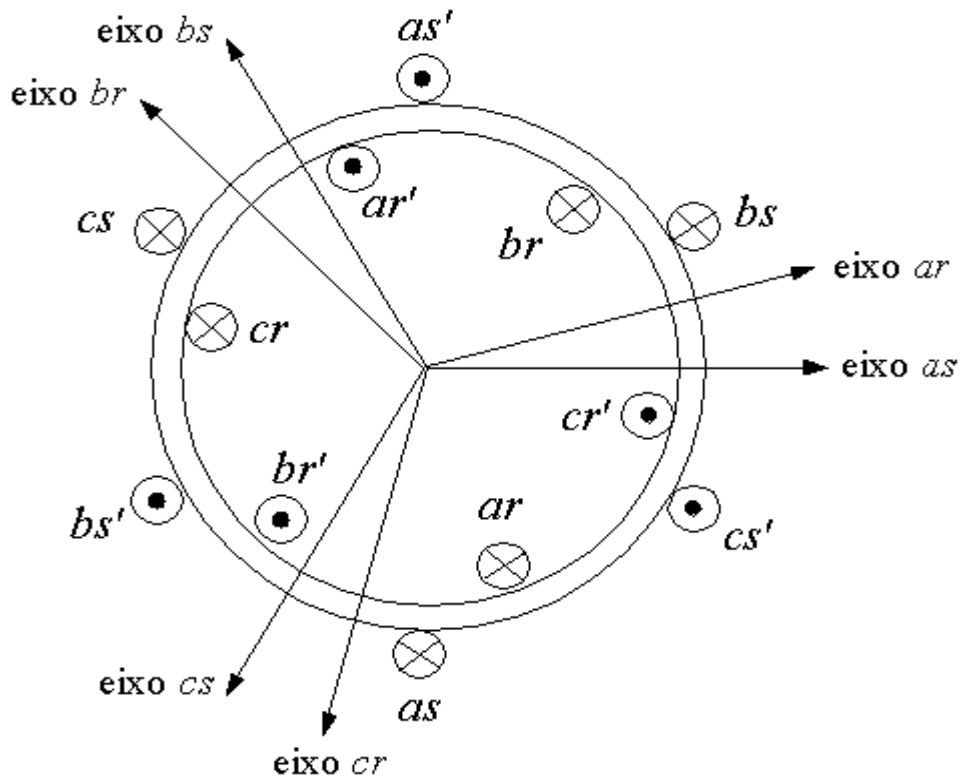


Figura 2.1. Diagrama esquemático dos enrolamentos do motor trifásico de indução.

d) As indutâncias mútuas entre os enrolamentos do rotor são iguais entre si.

$$M_{rr} = L_{arbr} = L_{arcr} = L_{brar} = L_{brcr} = L_{crar} = L_{crbr} = -0,5 L_{mr}. \quad (2.4)$$

As mesmas considerações sobre o sinal negativo e o valor 0,5 feitas para as indutâncias mútuas entre os enrolamento do estator podem ser feitas para as indutâncias mútuas entre os enrolamentos do rotor.

e) As indutâncias mútuas entre um enrolamento de uma fase do estator e outro de uma fase do rotor são funções senoidais do ângulo  $q_r$  entre os mesmos e podem ser escritos como:

$$L_{asar} = L_{sr} \cos(q_r) \quad (2.5)$$

$$L_{asbr} = L_{sr} \cos(q_r + 2p/3) \quad (2.6)$$

$$L_{ascr} = L_{sr} \cos(q_r - 2p/3) \quad (2.7)$$

$$L_{bsar} = L_{sr} \cos(q_r - 2p/3) \quad (2.8)$$

$$L_{bsbr} = L_{sr} \cos(q_r) \quad (2.9)$$

$$L_{bscr} = L_{sr} \cos(q_r + 2p/3) \quad (2.10)$$

$$L_{csar} = L_{sr} \cos(q_r + 2p/3) \quad (2.11)$$

$$L_{csbr} = L_{sr} \cos(q_r - 2p/3) \quad (2.12)$$

$$L_{cscr} = L_{sr} \cos(q_r) \quad (2.13)$$

O ângulo  $q_r$  é o ângulo elétrico formado entre o eixo de um enrolamento do estator tomado como referência e outro do rotor, também tomado como referência.  $L_{sr}$  é o valor máximo da indutância mútua entre um enrolamento do estator e outro do rotor, o qual ocorre quando seus eixos estão alinhados.

## 2.2 Equações de tensão e torque do motor de indução

As equações clássicas de tensão do motor de indução trifásico [1,2] podem ser descritas por:

$$v_{as} = r_s i_{as} + \frac{d}{dt} l_{as} \quad (2.14)$$

$$v_{bs} = r_s i_{bs} + \frac{d}{dt} l_{bs} \quad (2.15)$$

$$v_{cs} = r_s i_{cs} + \frac{d}{dt} l_{cs} \quad (2.16)$$

$$v_{ar} = r_r i_{ar} + \frac{d}{dt} l_{ar} \quad (2.17)$$

$$v_{br} = r_r i_{br} + \frac{d}{dt} l_{br} \quad (2.18)$$

$$v_{cr} = r_r i_{cr} + \frac{d}{dt} l_{cr} \quad (2.19)$$

Onde  $l_{as}$ ,  $l_{bs}$ ,  $l_{cs}$ ,  $l_{ar}$ ,  $l_{br}$  e  $l_{cr}$  são os enlaces de fluxo correspondentes a cada uma das fases do rotor e do estator, e são dados por:

$$l_{as} = L_{asas} i_{as} + L_{asbs} i_{bs} + L_{ascs} i_{cs} + L_{asar} i_{ar} + L_{asbr} i_{br} + L_{ascr} i_{cr} \quad (2.20)$$

$$l_{bs} = L_{bsas} i_{as} + L_{bsbs} i_{bs} + L_{bscs} i_{cs} + L_{bsar} i_{ar} + L_{bsbr} i_{br} + L_{bscr} i_{cr} \quad (2.21)$$

$$l_{cs} = L_{csas} i_{as} + L_{csbs} i_{bs} + L_{cscs} i_{cs} + L_{csar} i_{ar} + L_{csbr} i_{br} + L_{cscr} i_{cr} \quad (2.22)$$

$$l_{ar} = L_{asar} i_{as} + L_{bsar} i_{bs} + L_{csar} i_{cs} + L_{arar} i_{ar} + L_{arbr} i_{br} + L_{arcr} i_{cr} \quad (2.23)$$

$$l_{br} = L_{asbr} i_{as} + L_{bsbr} i_{bs} + L_{csbr} i_{cs} + L_{bsar} i_{ar} + L_{brbr} i_{br} + L_{brcr} i_{cr} \quad (2.24)$$

$$l_{cr} = L_{ascr} i_{as} + L_{bscr} i_{bs} + L_{csbr} i_{cs} + L_{crar} i_{ar} + L_{crbr} i_{br} + L_{crer} i_{cr} \quad (2.25)$$

É conveniente referir as variáveis do enrolamento do rotor ao enrolamento do estator, pois os parâmetros do motor obtidos de ensaio são todos já referidos ao estator.

Para isso utilizam-se as relações de espiras dos mesmos:

$$i'_{abcr} = \left( \frac{N_r}{N_s} \right) i_{abcr} \quad (2.26)$$

$$v'_{abcr} = \left( \frac{N_s}{N_r} \right) v_{abcs} \quad (2.27)$$

$$l'_{abcr} = \left( \frac{N_s}{N_r} \right) l_{abcr} \quad (2.28)$$

$$L_{ms} = \left( \frac{N_s}{N_r} \right) L_{sr} \quad (2.29)$$

$$L'_{sr} = \left( \frac{N_s}{N_r} \right) L_{sr} \quad (2.30)$$

$$L_{mr} = \left( \frac{N_r}{N_s} \right)^2 L_{ms} \quad (2.31)$$

$$L'_r = \left( \frac{N_s}{N_r} \right)^2 L_r \quad (2.32)$$

$$L'_{lr} = \left( \frac{N_s}{N_r} \right)^2 L_{lr} \quad (2.33)$$

$$r'_r = \left( \frac{N_s}{N_r} \right)^2 r_r \quad (2.34)$$

Aplicando-se essas relações, pode-se reescrever as indutâncias próprias do rotor, as indutâncias mútuas entre os enrolamentos do rotor e as indutâncias mútuas entre enrolamentos do estator e do rotor como segue:

$$L'_{arar} = L'_{brbr} = L'_{crrr} = L'_{lr} + L_{ms} \quad (2.35)$$

$$L'_{arbr} = L'_{arcr} = L'_{brar} = L'_{brcr} = L'_{crar} = L'_{crbr} = -0,5 L_{ms} \quad (2.36)$$

$$L'_{asar} = L_{ms} \cos(q_r) \quad (2.37)$$

$$L'_{asbr} = L_{ms} \cos(q_r + 2p/3) \quad (2.38)$$

$$L'_{ascr} = L_{ms} \cos(q_r - 2p/3) \quad (2.39)$$

$$L'_{bsar} = L_{ms} \cos(q_r - 2p/3) \quad (2.40)$$

$$L'_{bsbr} = L_{ms} \cos(q_r) \quad (2.41)$$

$$L'_{bscr} = L_{ms} \cos(q_r + 2p/3) \quad (2.42)$$

$$L'_{csar} = L_{ms} \cos(q_r + 2p/3) \quad (2.43)$$

$$L'_{csbr} = L_{ms} \cos(q_r - 2p/3) \quad (2.44)$$

$$L'_{cscr} = L_{ms} \cos(q_r) \quad (2.45)$$

As equações do motor com as variáveis do rotor referidas ao estator tornam-se então

$$v_{as} = r_s i_{as} + \frac{d}{dt} \lambda_{as} \quad (2.46)$$

$$v_{bs} = r_s i_{bs} + \frac{d}{dt} \lambda_{bs} \quad (2.47)$$

$$v_{cs} = r_s i_{cs} + \frac{d}{dt} \lambda_{cs} \quad (2.48)$$

$$v'_{ar} = r'_r i'_{ar} + \frac{d}{dt} \lambda'_{ar} \quad (2.49)$$

$$v'_{br} = r'_r i'_{br} + \frac{d}{dt} \lambda'_{br} \quad (2.50)$$

$$v'_{cr} = r'_r i'_{cr} + \frac{d}{dt} \lambda'_{cr} \quad (2.51)$$

onde

$$l_{as} = L_{asas} i_{as} + L_{asbs} i_{bs} + L_{ascs} i_{cs} + L'_{asar} i'_{ar} + L'_{asbr} i'_{br} + L'_{ascr} i'_{cr} \quad (2.52)$$

$$l_{bs} = L_{bsas} i_{as} + L_{bsbs} i_{bs} + L_{bscs} i_{cs} + L'_{bsar} i'_{ar} + L'_{bsbr} i'_{br} + L'_{bscr} i'_{cr} \quad (2.53)$$

$$l_{cs} = L_{csas} i_{as} + L_{csbs} i_{bs} + L_{cscs} i_{cs} + L'_{csar} i'_{ar} + L'_{csbr} i'_{br} + L'_{cscr} i'_{cr} \quad (2.54)$$

$$l'_{ar} = L'_{asar} i_{as} + L'_{bsar} i_{bs} + L'_{csar} i_{cs} + L'_{arar} i'_{ar} + L'_{arbr} i'_{br} + L'_{arcr} i'_{cr} \quad (2.55)$$

$$l'_{br} = L'_{asbr} i_{as} + L'_{bsbr} i_{bs} + L'_{csbr} i_{cs} + L'_{bsar} i'_{ar} + L'_{brbr} i'_{br} + L'_{brcr} i'_{cr} \quad (2.56)$$

$$l'_{cr} = L'_{ascr} i_{as} + L'_{bscr} i_{bs} + L'_{csbr} i_{cs} + L'_{crar} i'_{ar} + L'_{crbr} i'_{br} + L'_{cscr} i'_{cr} \quad (2.57)$$

Essas equações de enlace de fluxo podem ser reescritas na forma matricial e tornam-se

$$\begin{bmatrix} l_{abcs} \\ l'_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & L_{SR} \\ (L'_{SR})^T & L'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abcs} \\ i'_{abcr} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Para completar as equações que descrevem o comportamento do motor, falta ainda definir a equação do torque. O torque, resultante da conversão eletromecânica de energia, deve-se à variação da indutância com a rotação do rotor e pode ser escrito como [1,2]:

$$\begin{aligned} T = \frac{P}{2} [ & i_{as} i_{ar} \frac{\partial}{\partial q} L_{asar} + i_{bs} i_{ar} \frac{\partial}{\partial q} L_{bsar} + i_{cs} i_{ar} \frac{\partial}{\partial q} L_{csar} + \\ & i_{as} i_{br} \frac{\partial}{\partial q} L_{asbr} + i_{bs} i_{br} \frac{\partial}{\partial q} L_{bsbr} + i_{cs} i_{ar} \frac{\partial}{\partial q} L_{csbr} + \\ & i_{as} i_{cr} \frac{\partial}{\partial q} L_{ascr} + i_{bs} i_{cr} \frac{\partial}{\partial q} L_{bscr} + i_{cs} i_{cr} \frac{\partial}{\partial q} L_{cscr} ] \end{aligned} \quad (2.59)$$

Onde  $P$  é o número de pólos.

Escrevendo esse conjunto de equações sob forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} v_{abcs} \\ v'_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + pL_s & pL_{SR} \\ p(L'_{SR})^T & R'_r + pL'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abcs} \\ i'_{abcr} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$T_{em} = \left( \frac{P}{2} \right) (i_{abcs})^T \frac{\partial}{\partial q_r} (L'_{SR}) i'_{abcr} \quad (2.61)$$

Onde  $p$  é a derivada em relação ao tempo e:

$$L_s = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2} L_{ms} & -\frac{1}{2} L_{ms} \\ -\frac{1}{2} L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2} L_{ms} \\ -\frac{1}{2} L_{ms} & -\frac{1}{2} L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$L'_r = \begin{bmatrix} L'_{lr} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L'_{lr} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L'_{lr} + L_{ms} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$$L'_{SR} = L_{ms} \begin{bmatrix} \cos q_r & \cos(q_r + \frac{2p}{3}) & \cos(q_r - \frac{2p}{3}) \\ \cos(q_r - \frac{2p}{3}) & \cos q_r & \cos(q_r + \frac{2p}{3}) \\ \cos(q_r + \frac{2p}{3}) & \cos(q_r - \frac{2p}{3}) & \cos q_r \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

$$R_s = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$R_r = \begin{bmatrix} r_r & 0 & 0 \\ 0 & r_r & 0 \\ 0 & 0 & r_r \end{bmatrix} \quad (2.66)$$



### 3. A TEORIA DOS EIXOS DE REFERÊNCIA

O aparecimento de coeficientes variantes dependentes do tempo no sistema de equações diferenciais que representam o motor, especialmente em  $L_{sr}$ , matriz das indutâncias mútuas entre os enrolamentos do estator e do rotor, torna difícil sua solução analítica. Ao longo do tempo surgiram vários métodos de mudança de variáveis na tentativa de eliminar estes coeficientes variantes no tempo.

O primeiro deles foi desenvolvido por Park, nos final da década de 20, para máquinas síncronas, e equivalia a referenciar as variáveis do estator para um conjunto de eixos fixos no rotor.

Cerca de dez anos depois, Stanley desenvolveu uma transformação de variáveis para máquinas de indução que referenciava as variáveis do rotor a eixos fixos no estator.

Kron criou uma mudança de variáveis para motores de indução que referenciava tanto as grandezas do estator quanto as do rotor a um conjunto de eixos girando em sincronismo com o campo magnético girante.

Bereton aplicou as transformações de Park a motores de indução, ou seja, referenciou as variáveis do estator a eixos fixos no rotor.

Somente em 1965 Krause e Thomas perceberam que estas transformações eram variantes de uma única e genérica mudança de variáveis que referenciava as variáveis do estator e do rotor a um conjunto de eixos ou girando a uma velocidade qualquer ou estacionário.

A seguir será apresentada de forma sucinta as transformadas para eixos de referência. Uma apresentação mais completa pode ser encontrada nos trabalhos de BARBI [1] e KRAUSE et al. [2].

A aplicação desta teoria simplifica a resolução das equações do motor, o que permite uma economia no tempo de processamento. No capítulo seguinte serão apresentadas adequações a este modelo para a sua utilização com rede monofásica e capacitor.

#### 3.1. A transformada $dq0$

A transformação para eixos de referência pode ser pensada como a transformação de um enrolamento trifásico em um enrolamento bifásico cujas fases estão dispostas em

$90^\circ$  e que giram a uma velocidade  $\omega$  qualquer.

Esse sistema de referência é constituído de dois eixos: um eixo direto e um eixo em quadratura. Daí o nome de transformada  $dq0$  com o qual é também conhecida. As variáveis com índice  $0$  (zero) não estão associadas aos eixos de referência, mas estão associados aritmeticamente com as variáveis  $abc$  [2].

O esquema desta transformação pode ser visto na Figura 3.1 e é fácil observar as relações trigonométricas entre as grandezas  $abc$  e  $dq$ . A transformação vista na figura representa aquela aplicada a circuitos estacionários, que será vista a seguir.

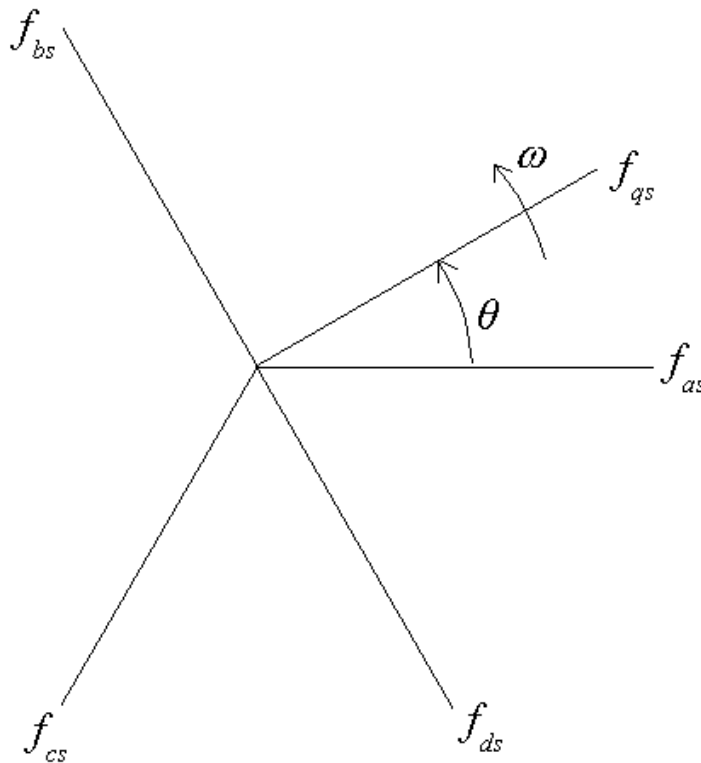


Figura 3.1. A transformada para circuitos estacionários.

### 3.2. A transformada aplicada a circuitos estacionários

A transformação para eixos de referência aplicada a circuitos estacionários pode ser expressa por

$$f_{qd0s} = K_s f_{abcs} \quad (3.1)$$

onde

$$(f_{qd0s})^T = [f_{qs} f_{ds} f_{0s}] \quad (3.2)$$

$$(f_{abcs})^T = [f_{as} f_{bs} f_{cs}] \quad (3.3)$$

$$K_s = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos q & \cos\left(q - \frac{2p}{3}\right) & \cos\left(q + \frac{2p}{3}\right) \\ \sin q & \sin\left(q - \frac{2p}{3}\right) & \sin\left(q + \frac{2p}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

O ângulo  $q$  entre o eixo  $q$  de referência e o eixo do enrolamento da fase  $a$  é dado por

$$q = \int_0^t w(x) dx + q(0) \quad (3.5)$$

A transformação inversa, ou seja, aquela que permite obter as variáveis  $abc$  a partir das variáveis  $dq0$ , pode ser expressa por

$$f_{abc} = (K_s)^{-1} f_{qd0s} \quad (3.6)$$

Onde

$$(K_s)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos q & \sin q & 1 \\ \cos\left(q - \frac{2p}{3}\right) & \sin\left(q - \frac{2p}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(q + \frac{2p}{3}\right) & \sin\left(q + \frac{2p}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Nas transformações mostradas acima,  $f$  pode ser tensão, corrente, enlace de fluxo ou carga elétrica.

A seguir será analisada a transformação aplicada às equações de tensão dos enrolamentos do estator. Os elementos resistivos e indutivos serão considerados em separado.

Escrevendo-se a equação de tensão envolvendo elementos resistivos, tem-se

$$v_{abc} = R_s i_{abc} \quad (3.8)$$

Substituindo a relação 3.6 na equação acima, tem-se

$$(K_s)^{-1} v_{qd0s} = R_s (K_s)^{-1} i_{qd0s} \quad (3.9)$$

Multiplicando-se ambos os lados da igualdade por  $K_s$ , tem-se

$$v_{qd0s} = K_s R_s (K_s)^{-1} i_{qd0s} \quad (3.10)$$

Como a matriz  $R_s$  das resistências dos enrolamentos do motor é uma matriz diagonal com todos os elementos dessa diagonal iguais, a matriz de resistências é igual antes e após a transformação.

Considerando-se agora os elementos indutivos, pode-se escrever as equações de

tensão para os enlaces de fluxo da seguinte forma

$$v_{abcs} = p \, l_{abcs} \quad (3.11)$$

Substituindo-se a relação 3.6 na equação acima, obtém-se

$$(K_s)^{-1} v_{qd0s} = p [ (K_s)^{-1} l_{qd0s} ] \quad (3.12)$$

Multiplicando-se ambos os lados da igualdade por  $K_s$  tem-se

$$v_{qd0s} = K_s p [ (K_s)^{-1} l_{qd0s} ] \quad (3.13)$$

Relembrando que  $p$  representa a derivação temporal, e aplicando-se a propriedade distributiva, obtem-se

$$v_{qd0s} = K_s p [ (K_s)^{-1} l_{qd0s} ] + K_s (K_s)^{-1} p [ l_{qd0s} ] \quad (3.14)$$

onde

$$p[(K_s)^{-1}] = \begin{bmatrix} -\text{sen } q & \cos q & 0 \\ -\text{sen}\left(q - \frac{2p}{3}\right) & \cos\left(q - \frac{2p}{3}\right) & 0 \\ -\text{sen}\left(q + \frac{2p}{3}\right) & \cos\left(q + \frac{2p}{3}\right) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$K_s p[(K_s)^{-1}] = w \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Assim, as equações das tensões para elementos indutivos podem ser escritas como

$$v_{qd0s} = w \, l_{dqs} + p \, l_{qd0s} \quad (3.17)$$

onde

$$(l_{dqs})^T = [l_{ds} \quad -l_{qs} \quad 0] \quad (3.18)$$

O termo  $w \, l_{dqs}$  é conhecido como tensão de velocidade [2], sendo que a velocidade aqui mencionada, e representada por  $w$ , é a velocidade angular dos eixos de referência.

Os enlaces de fluxo podem ser escritos como

$$l_{abcs} = L_s i_{abcs} \quad (3.19)$$

$$l_{qd0s} = K_s L_s (K_s)^{-1} i_{qd0s} \quad (3.20)$$

Lembrando que a matriz das indutâncias do estator  $L_s$  é dada por

$$L_s = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

e sabendo-se que

$$K_s L_s (K_s)^{-1} = \begin{bmatrix} L_{ls} + \frac{3}{2}L_{ms} & 0 & 0 \\ 0 & L_{ls} + \frac{3}{2}L_{ms} & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

pode-se perceber que a transformação causou a diagonalização da matriz de indutâncias.

### 3.3. A transformada aplicada aos circuitos do rotor

A transformação genérica para variáveis do rotor é descrita como

$$f_{qd0r} = K_r f_{abcr} \quad (3.23)$$

onde

$$(f_{qd0r})^T = [f_{qr} f_{dr} f_{0r}] \quad (3.24)$$

$$(f_{abcr})^T = [f_{ar} f_{br} f_{cr}] \quad (3.25)$$

$$K_r = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos b & \cos\left(b - \frac{2p}{3}\right) & \cos\left(b + \frac{2p}{3}\right) \\ \sin b & \sin\left(b - \frac{2p}{3}\right) & \sin\left(b + \frac{2p}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

O ângulo entre o eixo  $q$  de referência e o eixo do enrolamento da fase  $a$  do rotor é dado por

$$b = q - q_r \quad (3.27)$$

onde  $q$ , o ângulo entre o eixo  $q$  e a referência de posição, é dado por

$$q = \int_0^t w(x) dx + q(0) \quad (3.28)$$

e  $q_r$ , o ângulo entre o eixo do enrolamento  $a$  e a referência de posição, é dado por

$$q_r = \int_0^t w_r(x) dx + q_r(0) \quad (3.29)$$

Estas relações podem ser melhor vistas na Figura 3.2.



pode-se escrever as equações de tensão do motor no sistema de eixos de referência como segue.

$$v_{qd0s} = r_s i_{qd0s} + \omega_l l_{dqs} + p l_{qd0s} \quad (3.31)$$

$$v'_{qd0r} = r'_r i'_{qd0r} + (\omega - \omega_r) l'_{dqs} + p l'_{qd0s} \quad (3.32)$$

onde

$$(l_{dqs})^T = [l_{ds} \quad -l_{qs} \quad 0] \quad (3.33)$$

$$(l_{dqr})^T = [l_{dr} \quad -l_{qr} \quad 0] \quad (3.34)$$

Os enlaces de fluxo em variáveis  $dq0$  podem ser expressos aplicando-se as transformações na expressão 2.58, o que resulta em

$$\begin{bmatrix} l_{qd0s} \\ l'_{qd0r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_s L_s (K_s)^{-1} & K_s L'_{SR} (K_r)^{-1} \\ K_r (L'_{SR})^T (K_s)^{-1} & K_r L'_r (K_r)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qd0s} \\ i'_{qd0r} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

O termo  $K_s L_s (K_s)^{-1}$ , que representa a transformação aplicada às indutâncias próprias e mútuas do estator, já foi visto anteriormente e resulta na diagonalização da matriz  $L_s$ . Da mesma forma que para o estator, a aplicação da transformada  $dq0$  também diagonaliza a matriz das indutâncias próprias e mútuas do rotor,  $K_r L'_r (K_r)^{-1}$ , e a matriz da indutâncias mútuas entre os enrolamentos do rotor e do estator,  $K_s L'_{SR} (K_r)^{-1}$ .

$$K_r L'_r (K_r)^{-1} = \begin{bmatrix} L'_{lr} + \frac{3}{2} L_{ms} & 0 & 0 \\ 0 & L'_{lr} + \frac{3}{2} L_{ms} & 0 \\ 0 & 0 & L'_{lr} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$K_s L'_{SR} (K_r)^{-1} = K_r (L'_{SR})^T (K_s)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} L_{ms} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} L_{ms} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

As equações de tensão do sistema (3.31 e 3.32) em forma expandida são

$$v_{qs} = r_s i_{qs} + \omega_l l_{ds} + p l_{qs} \quad (3.38)$$

$$v_{ds} = r_s i_{ds} - \omega_l l_{qs} + p l_{ds} \quad (3.39)$$

$$v_{0s} = r_s i_{0s} + p l_{0s} \quad (3.40)$$

$$v'_{qr} = r'_s i'_{qr} + (\omega - \omega_r) l'_{dr} + p l'_{qr} \quad (3.41)$$

$$v'_{dr} = r'_s i'_{dr} - (\omega - \omega_r) l'_{qr} + p l'_{dr} \quad (3.42)$$

$$v'_{or} = r'_s i'_{or} + p l'_{or} \quad (3.43)$$

onde as equações dos enlaces de fluxo, também em forma expandida, podem ser descritas por

$$l_{qs} = L_{ls} i_{qs} + M (i_{qs} + i'_{qr}) \quad (3.44)$$

$$l_{ds} = L_{ls} i_{ds} + M (i_{ds} + i'_{dr}) \quad (3.45)$$

$$l_{os} = L_{ls} i_{os} \quad (3.46)$$

$$l'_{qr} = L'_{ls} i'_{qr} + M (i_{qs} + i'_{qr}) \quad (3.47)$$

$$l'_{dr} = L'_{ls} i'_{dr} + M (i_{ds} + i'_{dr}) \quad (3.48)$$

$$l'_{or} = L'_{ls} i'_{or} \quad (3.49)$$

onde

$$M = \frac{3}{2} L_{ms} \quad (3.50)$$

Como as variáveis do sistema geralmente são dadas em ohms, é comum expressar as tensões em função das reatâncias e não das indutâncias. Dessa forma, as equações de tensão em função dos enlaces de fluxo tornam-se

$$v_{qs} = r_s i_{qs} + \frac{W}{W_b} y_{ds} + \frac{P}{W_b} y_{qs} \quad (3.51)$$

$$v_{ds} = r_s i_{ds} - \frac{W}{W_b} y_{qs} + \frac{P}{W_b} y_{ds} \quad (3.52)$$

$$v_{os} = r_s i_{os} + \frac{W}{W_b} y_{os} \quad (3.53)$$

$$v'_{qr} = r'_s i'_{qr} + \left( \frac{W - W_r}{W_b} \right) y'_{dr} + \frac{P}{W_b} y'_{qr} \quad (3.54)$$

$$v'_{dr} = r'_s i'_{dr} - \left( \frac{W - W_r}{W_b} \right) y'_{qr} + \frac{P}{W_b} y'_{dr} \quad (3.55)$$

$$v'_{or} = r'_s i'_{or} + \frac{P}{W_b} y'_{or} \quad (3.56)$$

onde  $W_b$  é a velocidade angular base com a qual foram calculadas as reatâncias indutivas e  $y$  são os enlaces de fluxo por segundo, ou seja, volts.

Os enlaces de fluxo em volts podem ser descritos pelas equações

$$y_{qs} = X_{ls} i_{qs} + X_M (i_{qs} + i'_{qr}) \quad (3.57)$$

$$y_{ds} = X_{ls} i_{ds} + X_M (i_{ds} + i'_{dr}) \quad (3.58)$$



$$y_{0s} = X_{ls} i_{0s} \quad (3.59)$$

$$y_{qr} = X'_{ls} i'_{qr} + X_M(i_{qs} + i'_{qr}) \quad (3.60)$$

$$y_{dr} = X'_{ls} i'_{dr} + X_M(i_{ds} + i'_{dr}) \quad (3.61)$$

$$y_{0r} = X'_{ls} i'_{0r} \quad (3.62)$$

Nelas,  $X_{ls}$  representa a reatância de dispersão do estator,  $X'_{lr}$  a indutância de dispersão do rotor referida ao estator e  $X_M$  a reatância de magnetização.

Reescrevendo as equações de tensão sob a forma matricial, obtém-se

$$\begin{bmatrix} v_{qs} \\ v_{ds} \\ v_{0s} \\ v'_{qr} \\ v'_{dr} \\ v'_{0r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + \frac{p}{w_b} X_{ss} & \frac{w}{w_b} X_{ss} & 0 & \frac{p}{w_b} X_M & \frac{w}{w_b} X_M & 0 \\ -\frac{w}{w_b} X_{ss} & r_s + \frac{p}{w_b} X_{ss} & 0 & -\frac{w}{w_b} X_M & \frac{p}{w_b} X_M & 0 \\ 0 & 0 & r_x + \frac{p}{w_b} X_{ss} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p}{w_b} X_M & \left( \frac{w-w_r}{w_b} \right) X_M & 0 & r'_r + \frac{p}{w_b} X'_{rr} & \left( \frac{w-w_r}{w_b} \right) X'_{rr} & 0 \\ -\left( \frac{w-w_r}{w_b} \right) X_M & \frac{p}{w_b} X_M & 0 & -\left( \frac{w-w_r}{w_b} \right) X'_{rr} & r'_r + \frac{p}{w_b} X'_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r'_r + \frac{p}{w_b} X'_{lr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{0s} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \\ i'_{0r} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

onde

$$X_{ss} = X_{ls} + X_M \quad (3.64)$$

$$X'_{rr} = X'_{lr} + X_M \quad (3.65)$$

E as equações dos enlaces de fluxo por segundo na forma matricial são

$$\begin{bmatrix} y_{qs} \\ y_{ds} \\ y_{0s} \\ y'_{qr} \\ y'_{dr} \\ y'_{0r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ss} & 0 & 0 & X_M & 0 & 0 \\ 0 & X_{ss} & 0 & 0 & X_M & 0 \\ 0 & 0 & X_{ls} & 0 & 0 & 0 \\ X_M & 0 & 0 & X'_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & X_M & 0 & 0 & X'_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X'_{lr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{0s} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \\ i'_{0r} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Quando se seleciona os enlaces de fluxo como variáveis independentes ou de estado, obtém-se apenas uma derivada do enlace de fluxo em cada equação de tensão, enquanto que, ao se escolher as correntes como variáveis independentes, obtém-se duas derivadas de corrente. Este fato é importante na implementação de simulações por computador. Escrevendo-se então as equações de tensão em termos de enlaces de fluxo, tem-se

$$\begin{bmatrix} v_{qs} \\ v_{ds} \\ v_{0s} \\ v_{qr} \\ v_{dr} \\ v_{0r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_s X'_{rr}}{D} + \frac{p}{w_b} & \frac{w}{w_b} & 0 & -\frac{r_s X_M}{D} & 0 & 0 \\ -\frac{w}{w_b} & \frac{r_s X'_{rr}}{D} + \frac{p}{w_b} & 0 & 0 & -\frac{r_s X_M}{D} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_s}{X_{ls}} + \frac{p}{w_b} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{r'_s X_M}{D} & 0 & 0 & \frac{r'_s X_{ss}}{D} + \frac{p}{w_b} & \frac{w - w_r}{w_b} & 0 \\ 0 & -\frac{r'_s X_M}{D} & 0 & -\frac{w - w_r}{w_b} & \frac{r'_s X_{ss}}{D} + \frac{p}{w_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r'_r}{X_{lr}} + \frac{p}{w_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{qs} \\ y_{ds} \\ y_{0s} \\ y'_{qr} \\ y'_{dr} \\ y'_{0r} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

onde

$$D = X_{ss} X'_{rr} - X_M^2 \quad (3.68)$$

E as correntes podem ser calculadas por

$$\begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{0s} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \\ i'_{0r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_{rr} & 0 & 0 & -X_M & 0 & 0 \\ 0 & X'_{rr} & 0 & 0 & -X_M & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D}{X_{ls}} & 0 & 0 & 0 \\ -X_M & 0 & 0 & X_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & -X_M & 0 & 0 & X_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{D}{X_{lr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{qs} \\ y_{ds} \\ y_{0s} \\ y'_{qr} \\ y'_{dr} \\ y'_{0r} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Para a simulação, é conveniente escrever as equações de corrente em função dos enlacs de fluxo:

$$i_{qs} = \frac{1}{X_{ls}} (y_{qs} - y_{mq}) \quad (3.70)$$

$$i_{ds} = \frac{1}{X_{ls}} (y_{ds} - y_{md}) \quad (3.71)$$

$$i_{0s} = \frac{1}{X_{ls}} y_{0s} \quad (3.72)$$

$$i'_{qr} = \frac{1}{X_{lr}} (y'_{qr} - y_{mq}) \quad (3.73)$$

$$i'_{dr} = \frac{1}{X'_{lr}} (\mathcal{Y}'_{dr} - \mathcal{Y}_{md}) \quad (3.74)$$

$$i'_{0r} = \frac{1}{X'_{lr}} \mathcal{Y}'_{0r} \quad (3.75)$$

onde

$$\mathcal{Y}_{mq} = X_M (i_{qs} + i'_{qr}) \quad (3.76)$$

$$\mathcal{Y}_{md} = X_M (i_{ds} + i'_{dr}) \quad (3.77)$$

Para calcular os enlaces de fluxo, usa-se

$$\mathcal{Y}_{qs} = \frac{W_b}{p} \left[ v_{qs} - \frac{W}{W_b} \mathcal{Y}_{ds} + \frac{r_s}{X_{ls}} (\mathcal{Y}_{mq} - \mathcal{Y}_{qs}) \right] \quad (3.78)$$

$$\mathcal{Y}_{ds} = \frac{W_b}{p} \left[ v_{ds} - \frac{W}{W_b} \mathcal{Y}_{qs} + \frac{r_s}{X_{ls}} (\mathcal{Y}_{md} - \mathcal{Y}_{ds}) \right] \quad (3.79)$$

$$\mathcal{Y}_{0s} = \frac{W_b}{p} \left[ v_{0s} - \frac{r_s}{X_{ls}} \mathcal{Y}_{0s} \right] \quad (3.80)$$

$$\mathcal{Y}'_{qr} = \frac{W_b}{p} \left[ v'_{qr} - \frac{W - W_r}{W_b} \mathcal{Y}'_{dr} + \frac{r'_r}{X'_{lr}} (\mathcal{Y}_{mq} - \mathcal{Y}'_{qr}) \right] \quad (3.81)$$

$$\mathcal{Y}'_{dr} = \frac{W_b}{p} \left[ v'_{dr} - \frac{W - W_r}{W_b} \mathcal{Y}'_{qr} + \frac{r'_r}{X'_{lr}} (\mathcal{Y}_{md} - \mathcal{Y}'_{dr}) \right] \quad (3.82)$$

$$\mathcal{Y}'_{0r} = \frac{W_b}{p} \left[ v'_{0r} - \frac{r'_r}{X'_{lr}} \mathcal{Y}'_{0r} \right] \quad (3.83)$$

onde

$$\mathcal{Y}_{mq} = X_{aq} \left( \frac{\mathcal{Y}_{qs}}{X_{ls}} + \frac{\mathcal{Y}'_{qr}}{X'_{lr}} \right) \quad (3.84)$$

$$\mathcal{Y}_{md} = X_{ad} \left( \frac{\mathcal{Y}_{ds}}{X_{ls}} + \frac{\mathcal{Y}'_{dr}}{X'_{lr}} \right) \quad (3.85)$$

e onde

$$X_{aq} = X_{ad} = \left( \frac{1}{X_M} + \frac{1}{X_{ls}} + \frac{1}{X'_{lr}} \right)^{-1} \quad (3.86)$$

### 3.5. Equação de torque em variáveis $dq0$

Aplicando-se a transformada  $dq0$  à equação do torque do motor, obtém-se

$$T_e = \left( \frac{P}{2} \right) \left[ (K_s)^{-1} i_{qd0s} \right]^T \frac{\partial}{\partial q_r} [L_{sr}'] (K_r)^{-1} i_{qd0r}' \quad (3.87)$$

Esta equação pode ser expressa em termos de corrente (3.88), em termos de fluxo por segundo e correntes (3.89) ou em termos somente de fluxo por segundo (3.90).

$$T_e = \left( \frac{3}{2} \right) \left( \frac{P}{2} \right) M (i_{qs}' i_{dr}' - i_{ds}' i_{qr}') \quad (3.88)$$

$$T_e = \left( \frac{3}{2} \right) \left( \frac{P}{2} \right) \left( \frac{1}{W_b} \right) (\Psi_{qr}' i_{dr}' + \Psi_{dr}' i_{qr}') \quad (3.89)$$

$$T_e = \left( \frac{3}{2} \right) \left( \frac{P}{2} \right) \left( \frac{X_M}{DW_b} \right) (\Psi_{qs} \Psi_{dr}' + \Psi_{qr}' \Psi_{ds}) \quad (3.90)$$

A velocidade do rotor pode ser calculada integrando-se

$$pW_r = \frac{P}{2} \frac{(T_{em} - T_L)}{J_{eq}} \quad (3.91)$$

onde  $T_{em}$  é o torque eletromagnético fornecido pelo motor,  $T_L$  o torque exigido pela carga,  $J_{eq}$  a inércia equivalente (do rotor e da carga) e  $P$  o número de pólos.

As equações de corrente em função dos enlaces de fluxo (3.70-3.75) e as equações dos enlaces de fluxo em função das tensões (3.78-3.86), em conjunto com a equação do torque (3.88, 3.89 ou 3.90) e com a equação da velocidade do rotor formam o modelo do motor trifásico de indução em variáveis  $dq0$  que será estendido no capítulo seguinte para acomodar a utilização deste em rede de alimentação monofásica.

## 4. EXTENSÃO DO MODELO PARA REDE MONOFÁSICA

Neste capítulo serão desenvolvidos os modelos do motor trifásico de indução para utilização em rede de alimentação monofásica. Primeiramente será apresentado um modelo baseado na teoria dos eixos de referência, mostrado nos capítulo anterior. Em seguida será apresentado um modelo alternativo baseado nas equações de espaço-estado do motor trifásico de indução.

### 4.1 Modelo utilizando a teoria dos Eixos de Referência

De posse das equações do motor de indução e da transformada para eixos de referência, pode-se agora estender o modelo do motor de indução trifásico para que leve em consideração a ligação em uma rede monofásica através do uso do capacitor.

As equações de tensão do motor trifásico de indução apresentadas nos capítulos anteriores, tanto em variáveis de máquina quanto em variáveis  $dq0$ , representam as tensões nos enrolamentos do motor. Para uma alimentação trifásica balanceada, mostrada na Figura 4.1, as tensões nos pontos  $g$  e  $n$  são iguais, ou seja, a tensão  $v_{ng}$  é nula. Assim sendo, pode-se afirmar que a tensão aplicada ao enrolamento do motor  $v_{as}$  é igual à tensão da fonte  $e_{as}$ . O mesmo vale para as outras fases, e então  $v_{bs}$  é igual a  $e_{bs}$  e  $v_{cs}$  é igual a  $e_{cs}$ .

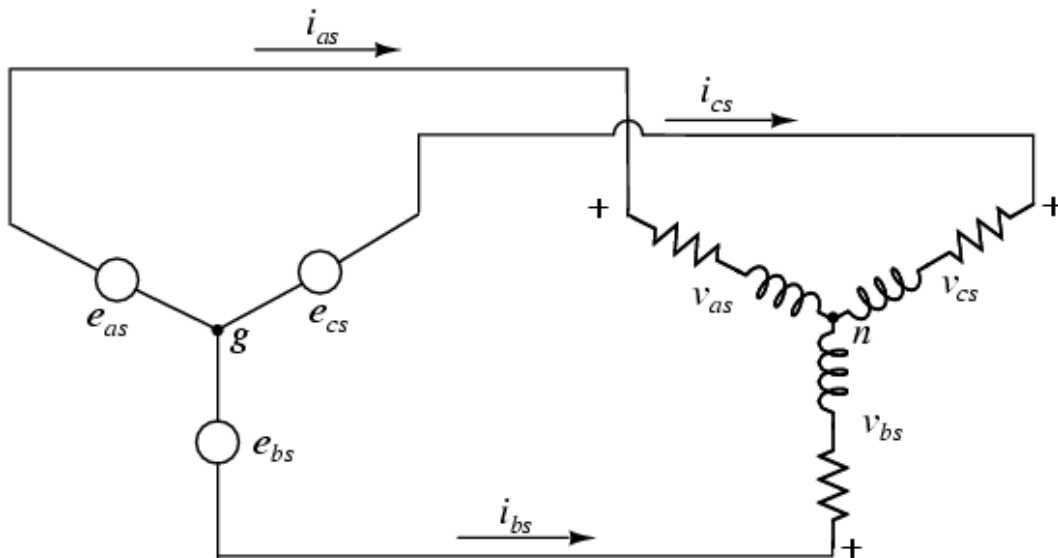
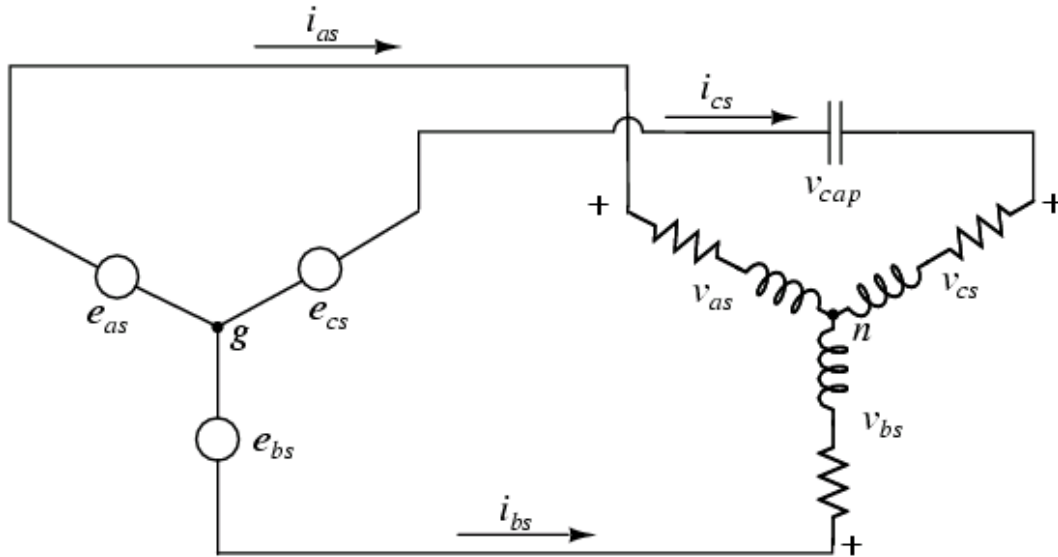


Figura 4.1. Circuito esquemático do motor e da alimentação trifásica.

Para o caso de uma alimentação desbalanceada ou da existência de uma carga adicional em uma das fases, essas relações não são mais verdadeiras. Quando isto ocorre, a tensão  $v_{ng}$  não é mais nula e se faz necessário calcular as tensões aplicadas aos enrolamentos do motor.

Tome-se como base o circuito mostrado na Figura 4.2. Este circuito equivale a uma fonte trifásica alimentando um motor trifásico com uma impedância adicional, correspondente ao capacitor, em uma das fases (neste caso, a fase  $c$ ). Este circuito será posteriormente adaptado para representar uma fonte monofásica alimentando um motor trifásico de indução. Esta adaptação consiste em fazer a escolha correta das tensões da fonte, de forma a fazê-lo representar uma fonte monofásica alimentando o motor. Para isso faz-se as tensões  $e_{as}$  e  $e_{cs}$  iguais entre si em módulo e em fase e  $e_{bs}$  igual a zero.



*Figura 4.2. Circuito esquemático do motor e da alimentação trifásica, que será posteriormente adequado para se tornar uma rede monofásica.*

Como mencionado anteriormente, o fato de se ter tensões desequilibradas alimentando o motor impede que utilizemos as tensões da fonte como sendo as tensões dos enrolamentos, pois a tensão  $v_{ng}$  não é mais nula. Assim necessita-se calcular as tensões nos enrolamentos para então utilizar-se a transformada  $dq0$ .

Do circuito pode-se escrever

$$e_{as} = v_{as} + v_{ng} \quad (4.1)$$

$$e_{bs} = v_{bs} + v_{ng} \quad (4.2)$$

$$e_{cs} = v_{cs} + v_{cap} + v_{ng} \quad (4.3)$$

Onde  $v_{cap}$  é

$$\frac{d}{dt} v_{cap} = \frac{1}{C} i_{cs} \quad (4.4)$$

Somando-se as três equações acima, tem-se que

$$e_{as} + e_{bs} + e_{cs} = v_{as} + v_{bs} + v_{cs} + v_{cap} + 3v_{ng} \quad (4.5)$$

Lembrando que

$$v_{as} = r_s i_{as} + \frac{d}{dt} l_{as} \quad (4.6)$$

$$v_{bs} = r_s i_{bs} + \frac{d}{dt} l_{bs} \quad (4.7)$$

$$v_{cs} = r_s i_{cs} + \frac{d}{dt} l_{cs} \quad (4.8)$$

e que

$$l_{as} = L_{asas} i_{as} + L_{asbs} i_{bs} + L_{ascs} i_{cs} + L'_{asar} i'_{ar} + L'_{asbr} i'_{br} + L'_{ascr} i'_{cr} \quad (4.9)$$

$$l_{bs} = L_{bsas} i_{as} + L_{bsbs} i_{bs} + L_{bscs} i_{cs} + L'_{bsar} i'_{ar} + L'_{bsbr} i'_{br} + L'_{bscr} i'_{cr} \quad (4.10)$$

$$l_{cs} = L_{csas} i_{as} + L_{csbs} i_{bs} + L_{cscs} i_{cs} + L'_{csar} i'_{ar} + L'_{csbr} i'_{br} + L'_{cscr} i'_{cr} \quad (4.11)$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned} v_{as} + v_{bs} + v_{cs} = & r_s i_{as} + r_s i_{bs} + r_s i_{cs} + \\ & p[L_{asas} i_{as} + L_{asbs} i_{bs} + L_{ascs} i_{cs} + L'_{asar} i'_{ar} + L'_{asbr} i'_{br} + L'_{ascr} i'_{cr} + L_{bsas} i_{as} + \\ & L_{bsbs} i_{bs} + L_{bscs} i_{cs} + L'_{bsar} i'_{ar} + L'_{bsbr} i'_{br} + L'_{bscr} i'_{cr} + L_{csas} i_{as} + L_{csbs} i_{bs} + \\ & L_{cscs} i_{cs} + L'_{csar} i'_{ar} + L'_{csbr} i'_{br} + L'_{cscr} i'_{cr}] \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde  $p$  é a derivada temporal.

Do circuito pode-se observar a relação

$$i_{bs} = -(i_{as} + i_{cs}) \quad (4.13)$$

que ao ser substituída na expressão 4.12, resulta em

$$\begin{aligned} v_{as} + v_{bs} + v_{cs} = & r_s i_{as} - r_s (i_{as} + i_{cs}) + r_s i_{cs} + \\ & p[L_{asas} i_{as} - L_{asbs}(i_{as} + i_{cs}) + L_{ascs} i_{cs} + L'_{asar} i'_{ar} + L'_{asbr} i'_{br} + L'_{ascr} i'_{cr} + L_{bsas} \\ & i_{as} - L_{bsbs}(i_{as} + i_{cs}) + L_{bscs} i_{cs} + L'_{bsar} i'_{ar} + L'_{bsbr} i'_{br} + L'_{bscr} i'_{cr} + L_{csas} i_{as} - \\ & L_{csbs}(i_{as} + i_{cs}) + L_{cscs} i_{cs} + L'_{csar} i'_{ar} + L'_{csbr} i'_{br} + L'_{cscr} i'_{cr}] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ao expandir-se a expressão 4.14, observa-se a eliminação de todos os termos que envolvem correntes do estator, obtendo-se então

$$v_{as} + v_{bs} + v_{cs} =$$

$$p[(L'_{asar} + L'_{bsar} + L'_{csar}) i'_{ar} + (L'_{asbr} + L'_{bsbr} + L'_{csbr}) i'_{br} + (L'_{ascr} + L'_{bscr} + L'_{cscr}) i'_{cr}] \quad (4.15)$$

Lembrando ainda que

$$L'_{asar} = L_{ms} \cos(q_r) \quad (4.16)$$

$$L'_{asbr} = L_{ms} \cos(q_r + 2p/3) \quad (4.17)$$

$$L'_{ascr} = L_{ms} \cos(q_r - 2p/3) \quad (4.18)$$

$$L'_{bsar} = L_{ms} \cos(q_r - 2p/3) \quad (4.19)$$

$$L'_{bsbr} = L_{ms} \cos(q_r) \quad (4.20)$$

$$L'_{bscr} = L_{ms} \cos(q_r + 2p/3) \quad (4.21)$$

$$L'_{csar} = L_{ms} \cos(q_r + 2p/3) \quad (4.22)$$

$$L'_{csbr} = L_{ms} \cos(q_r - 2p/3) \quad (4.23)$$

$$L'_{cscr} = L_{ms} \cos(q_r) \quad (4.24)$$

pode-se reescrever a soma das tensões no enrolamento do motor como

$$v_{as} + v_{bs} + v_{cs} =$$

$$p[L_{ms} (\cos(q_r) + \cos(q_r - 2p/3) + \cos(q_r + 2p/3)) i'_{ar} + L_{ms} (\cos(q_r + 2p/3) + \cos(q_r) + \cos(q_r - 2p/3)) i'_{br} + L_{ms} (\cos(q_r - 2p/3) + \cos(q_r + 2p/3) + \cos(q_r)) i'_{cr}] \quad (4.25)$$

Como

$$\cos(q_r) + \cos(q_r - 2p/3) + \cos(q_r + 2p/3) = 0 \quad (4.26)$$

a soma das tensões nos enrolamentos é nula, ou seja

$$v_{as} + v_{bs} + v_{cs} = 0 \quad (4.27)$$

Pode-se então escrever

$$v_{ng} = \frac{1}{3}(e_{as} + e_{bs} + e_{cs}) - \frac{1}{3}v_{cap} \quad (4.28)$$

Substituindo-se este valor de  $v_{ng}$  nas equações originais, pode-se escrever

$$v_{as} = +\frac{2}{3}e_{as} - \frac{1}{3}e_{bs} - \frac{1}{3}e_{cs} + \frac{1}{3}v_{cap} \quad (4.29)$$

$$v_{bs} = -\frac{1}{3}e_{as} + \frac{2}{3}e_{bs} - \frac{1}{3}e_{cs} + \frac{1}{3}v_{cap} \quad (4.30)$$

$$v_{cs} = -\frac{1}{3}e_{as} - \frac{1}{3}e_{bs} + \frac{2}{3}e_{cs} - \frac{2}{3}v_{cap} \quad (4.31)$$

Levando-se em consideração a escolha de tensões feitas anteriormente, ou seja



$$e_{as} = e_{cs} \quad (4.32)$$

$$e_{bs} = 0 \quad (4.33)$$

pode-se finalmente escrever

$$v_{as} = +\frac{1}{3}e_{as} + \frac{1}{3}v_{cap} \quad (4.34)$$

$$v_{bs} = -\frac{2}{3}e_{as} + \frac{1}{3}v_{cap} \quad (4.35)$$

$$v_{cs} = +\frac{1}{3}e_{as} - \frac{2}{3}v_{cap} \quad (4.36)$$

Já se têm agora todos os elementos para que se possa fazer a simulação. A forma como é feita a simulação é explicada no Capítulo 5.

Com este modelo pode-se analisar as curvas de torque do motor, bem como as curvas de tensão e corrente em cada fase do motor e a curva de tensão e corrente no capacitor. Esta análise estende-se desde a partida até o ponto de operação do motor. Pode-se também analisar o motor a vazio ou com carga.

## 4.2. Modelo utilizando as equações de espaço-estado

No decorrer dos estudos, apresentou-se uma outra possibilidade para o desenvolvimento de um modelo que representasse o motor de indução trifásico alimentado por rede monofásica. Esse segundo modelo pode ser obtido aplicando-se as relações da teoria de circuitos elétricos às equações do sistema representado pela Figura 4.3.

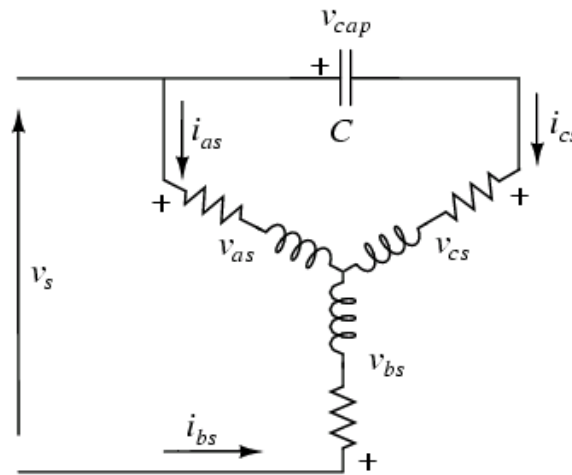


Figura 4.3. Motor trifásico alimentado por rede monofásica.

As relações que podem ser obtidas do circuito do motor são:

$$v_s = v_{as} - v_{bs} \quad (4.37)$$

$$v_{cap} = v_{as} - v_{cs} \quad (4.38)$$

$$i_{bs} = -(i_{as} + i_{cs}) \quad (4.39)$$

Substituindo-se as equações dos enlaces de fluxo (2.52-2.57) nas equações de tensão do motor (2.46-2.51), obtém-se:

$$v_{as} = r_s i_{as} + p(L_{ss} i_{as} + M_{ss} i_{bs} + M_{ss} i_{cs} + L'_{asar} i'_{ar} + L'_{asbr} i'_{br} + L'_{ascr} i'_{cr}) \quad (4.40)$$

$$v_{bs} = r_s i_{bs} + p(M_{ss} i_{as} + L_{ss} i_{bs} + M_{ss} i_{cs} + L'_{bsar} i'_{ar} + L'_{bsbr} i'_{br} + L'_{bscr} i'_{cr}) \quad (4.41)$$

$$v_{cs} = r_s i_{cs} + p(M_{ss} i_{as} + M_{ss} i_{bs} + L_{ss} i_{cs} + L'_{csar} i'_{ar} + L'_{csbr} i'_{br} + L'_{cscr} i'_{cr}) \quad (4.42)$$

$$v'_{ar} = r'_r i'_{ar} + p(L'_{asar} i_{as} + L'_{bsar} i_{bs} + L'_{csar} i_{cs} + L'_{rr} i'_{ar} + M'_{rr} i'_{br} + M'_{rr} i'_{cr}) \quad (4.43)$$

$$v'_{br} = r'_r i'_{br} + p(L'_{asbr} i_{as} + L'_{bsbr} i_{bs} + L'_{csbr} i_{cs} + M'_{sr} i'_{ar} + L'_{rr} i'_{br} + M'_{rr} i'_{cr}) \quad (4.44)$$

$$v'_{cr} = r'_r i'_{cr} + p(L'_{ascr} i_{as} + L'_{bscr} i_{bs} + L'_{csbr} i_{cs} + M'_{rr} i'_{ar} + M'_{rr} i'_{br} + L'_{rr} i'_{cr}) \quad (4.45)$$

Substituindo-se as equações 4.40, 4.41 e 4.39 em 4.37, as equações 4.40, 4.42 e 4.39 em 4.38, e a equação 4.39 em 4.43, 4.44 e 4.45, obtém-se

$$v_s = 2r_s i_{as} + r_s i_{cs} + p[2(L_{ss} - M_{ss})i_{as} + (L_{ss} - M_{ss})i_{cs} + (L'_{asar} - L'_{bsar})i_{ar} + (L'_{asbr} - L'_{bsbr})i_{br} + (L'_{ascr} - L'_{bscr})i_{cr}] \quad (4.46)$$

$$v_{cap} = r_s i_{as} - r_s i_{cs} + p[(L_{ss} - M_{ss})i_{as} + (M_{ss} - L_{ss})i_{cs} + (L'_{asar} - L'_{csar})i_{ar} + (L'_{asbr} - L'_{csbr})i_{br} + (L'_{ascr} - L'_{cscr})i_{cr}] \quad (4.47)$$

$$v_{ar} = r_r i_{ar} + p[(L'_{asar} - L'_{bsar})i_{as} + (L'_{csar} - L'_{bsar})i_{cs} + L'_{rr} i_{ar} + M'_{rr} i_{br} + M'_{rr} i_{cr}] \quad (4.48)$$

$$v_{br} = r_r i_{br} + p[(L'_{asbr} - L'_{bsbr})i_{as} + (L'_{csbr} - L'_{bsbr})i_{cs} + M'_{rr} i_{ar} + L'_{rr} i_{br} + M'_{rr} i_{cr}] \quad (4.49)$$

$$v_{cr} = r_r i_{cr} + p[(L'_{ascr} - L'_{bscr})i_{as} + (L'_{cscr} - L'_{bscr})i_{cs} + M'_{rr} i_{ar} + M'_{rr} i_{br} + L'_{rr} i_{cr}] \quad (4.50)$$

Que sob a forma matricial tornam-se:

$$\begin{bmatrix} v_s \\ v_{cap} \\ v_{ar} \\ v_{br} \\ v_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r_s & r_s & 0 & 0 & 0 \\ r_s & -r_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{cs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 2(L_{ss} - M_{ss}) & L_{ss} - M_{ss} & L'_{asar} - L'_{bsar} & L'_{asbr} - L'_{bsbr} & L'_{ascr} - L'_{bscr} \\ L_{ss} - M_{ss} & M_{ss} - L_{ss} & L'_{asar} - L'_{csar} & L'_{asbr} - L'_{csbr} & L'_{ascr} - L'_{cscr} \\ L'_{asar} - L'_{bsar} & L'_{csar} - L'_{bsar} & L'_{rr} & M'_{rr} & M'_{rr} \\ L'_{asbr} - L'_{bsbr} & L'_{csbr} - L'_{bsbr} & M'_{rr} & L'_{rr} & M'_{rr} \\ L'_{ascr} - L'_{bscr} & L'_{cscr} - L'_{bscr} & M'_{rr} & M'_{rr} & L'_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{cs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Esta equação matricial pode ser representada resumidamente por

$$[v] = [R][i] + p([L])[i] \quad (4.52)$$

Novamente, lembrando que  $p$  é a derivada temporal e aplicando a propriedade distributiva, podemos reescrever as equações de tensão como

$$[v] = [R][i] + [L] p[i] + (p[L])[i] \quad (4.53)$$

Isolando-se o termo com as derivadas de corrente, tem-se

$$[L]p[i] = -(p[L])[i] - [R][i] + [v] \quad (4.54)$$

$$p[i] = -[L]^{-1} (p[L])[i] - [L]^{-1}[R][i] + [L]^{-1}[v] \quad (4.55)$$

$$p[i] = -[L]^{-1} (p[L] - [R])[i] + [L]^{-1}[v] \quad (4.56)$$

Acrescentando-se então a equação da tensão no capacitor

$$p(v_{cap}) = \frac{1}{C} i_{cs} \quad (4.57)$$

pode-se escrever a equação de espaço-estado do sistema.

$$p \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{cs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \\ v_{cap} \\ w_r \\ q_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & L_{12}^{-1} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & L_{22}^{-1} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & L_{32}^{-1} & 0 & 0 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & L_{42}^{-1} & 0 & 0 \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & L_{52}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{D}{J_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{cs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \\ v_{cap} \\ w_r \\ q_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{11}^{-1} & L_{12}^{-1} & L_{13}^{-1} & L_{14}^{-1} & L_{15}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21}^{-1} & L_{22}^{-1} & L_{23}^{-1} & L_{24}^{-1} & L_{25}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ L_{31}^{-1} & L_{32}^{-1} & L_{33}^{-1} & L_{34}^{-1} & L_{35}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ L_{41}^{-1} & L_{42}^{-1} & L_{43}^{-1} & L_{44}^{-1} & L_{45}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ L_{51}^{-1} & L_{52}^{-1} & L_{53}^{-1} & L_{54}^{-1} & L_{55}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

onde  $A_{ij}$  são os elementos da matriz

$$A = -[L]^{-1} (p[L] - [R]) \quad (4.59)$$

e  $L_{ij}^{-1}$  são os elementos da matriz inversa de  $L$ ,  $D$  o coeficiente de atrito e  $J_{eq}$  a inércia equivalente (do rotor e da carga). O coeficiente de atrito é desconsiderado neste trabalho.

$T$  é o torque resultante e pode ser expresso por:

$$T = \frac{P}{2} \frac{(T_{em} - T_L)}{J_{eq}} \quad (4.60)$$

Onde  $T_{em}$  é o torque eletromagnético fornecido pelo motor,  $T_L$  o torque exigido pela carga,  $J_{eq}$  a inércia equivalente e  $P$  o número de pólos.

Basta integrar agora o sistema.

Da mesma forma que o anterior, com este modelo pode-se analisar as curvas de torque do motor, bem como as curvas de tensão e corrente em cada fase do motor e a curva de tensão e corrente no capacitor. Esta análise estende-se desde a partida até o ponto de operação do motor. Pode-se também analisar o motor a vazio ou com carga.

Este modelo é de mais fácil implementação que o modelo anterior.

## 5. SIMULAÇÃO

Este capítulo mostra como foram executadas as simulações utilizando as equações apresentadas nos capítulos 3 e 4. Com as simulações são obtidos os valores de tensão e corrente nos enrolamentos de cada fase do motor, os valores de tensão e corrente no capacitor e os valores de torque e rotação do motor. De posse desses valores pode-se analisar o comportamento do motor quanto à sua capacidade de acionar a carga: o motor consegue fornecer o conjugado exigido pela carga? As correntes mantêm-se dentro de limites aceitáveis de forma que o motor não atinja temperaturas que o possam danificar?

As simulações das equações foram feitas utilizando-se o software Scilab, um pacote de programas científicos desenvolvido pelo INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique) e pela ENPC (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées).

A listagem dos programas escritos para o Scilab é apresentada nos apêndices.

### 5.1. Simulações utilizando a teoria dos eixos de referência

As simulações utilizando o modelo apresentado nos capítulos 3 e 4, sub-capítulo 4.1, podem ser representadas esquematicamente pela Figura 5.1. O diagrama em bloco representa um ciclo que é calculado a cada passo de tempo.

O bloco maior indicado por “Motor” representa o motor elétrico de indução trifásico. O que está fora deste bloco representa o capacitor, a fonte e a carga. As setas representam as interações que ocorrem entre as partes.

A escolha do passo de tempo é um aspecto importante na simulação. Um passo muito grande introduz imprecisões nas integrações. Um passo muito pequeno torna a simulação muito demorada. Nas simulações apresentadas neste trabalho foi utilizando um passo de tempo de 1 milésimo de segundo.

A velocidade dos eixos de referência  $w$  escolhida para as simulações foi zero, ou seja, o eixo de referência está estacionário, haja vista que os desbalanceamentos ocorrem no estator.

Como o motor de indução considerado nas simulações é um motor com rotor em gaiola, o mesmo possui as barras do rotor curto-circuitadas e, portanto,  $v'_{abcr}$  é um vetor nulo, e a transformação para as tensões do rotor, representada pelo bloco F, pode ser desconsiderada (as tensões no rotor antes e depois da transformação são nulas).

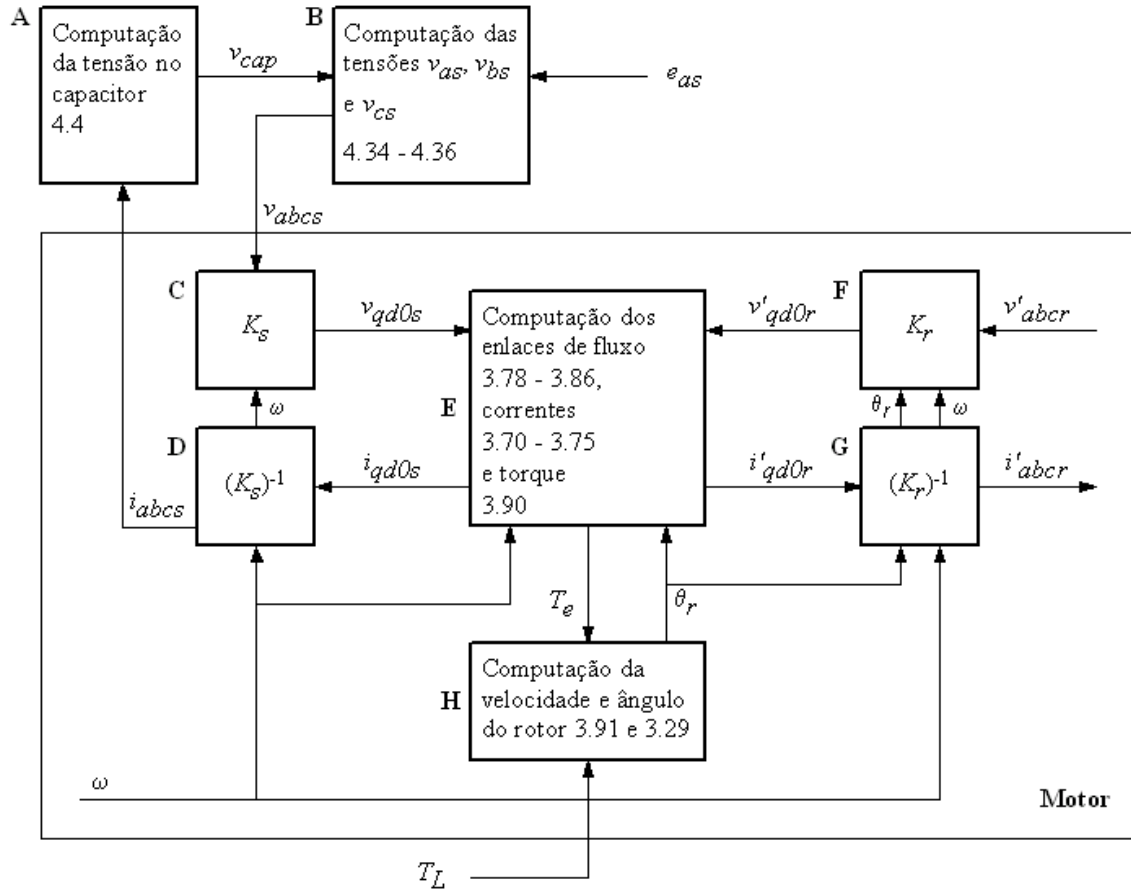


Figura 5.1. Diagrama esquemático da simulação do motor trifásico.

Lembrando que os valores das variáveis do motor envolvidas têm valor nulo no momento da aplicação da tensão (condições iniciais), estas simulações podem ser descritas pelos seguintes passos:

- § calcular o valor da tensão da fonte  $e_{as}$ , e com o valor da tensão no capacitor do passo anterior ou, no caso do primeiro ciclo, com a tensão inicial no capacitor (que é nula), calcular as tensões aplicadas aos enrolamentos do motor através das equações 4.34 – 4.36, representadas pelo bloco B;
- § aplicar a transformada  $dq0$  a essas tensões através da matriz de transformação  $K_s$  (bloco C);
- § calcular os enlaces de fluxo, integrando as equações 3.78 – 3.86 (bloco E);
- § calcular as correntes através das equações 3.70 – 3.75 (bloco E);
- § calcular o torque eletromagnético através da equação 3.90 (bloco E);
- § utilizando o valor calculado do torque eletromagnético e o torque da carga,

calcular a velocidade angular do rotor  $w_r$  através da integração da equação 3.91 e o ângulo do rotor  $q_r$  a partir da integração da equação 3.29 (bloco H);

- § calcular as correntes do estator em variáveis de máquina através da transformada inversa  $(K_s)^{-1}$  (bloco D).
- § calcular as correntes do rotor referidas ao estator em variáveis de máquina através da transformada inversa  $(K_r)^{-1}$  (bloco G).
- § com as correntes do estator, calcular a tensão no capacitor, integrando a equação 4.4, representada pelo bloco A;

Os valores calculados em um ciclo são utilizados como valores iniciais para o ciclo seguinte. Este processo é repetido até que se atinja o tempo de simulação previamente definido. Este tempo pode escolhido de acordo com a necessidade e geralmente é um tempo suficiente para que o motor atinja o ponto de operação (o equilíbrio com o conjugado da carga ou o funcionamento a vazio).

## 5.2. Simulações utilizando as equações de espaço-estado

As simulações do modelo apresentado no Capítulo 4, sub-capítulo 4.2, são mais simples e consistem na integração das equações de espaço-estado através do uso do Scilab.

As equações de espaço-estado contêm termos com senos e co-senos devido às indutâncias mútuas entre enrolamentos do estator e do rotor. Desta forma, em cada passo da integração é necessário calcular a matriz inversa e a derivada da matriz das indutâncias representada por  $[L]$  na expressão 4.52, calcular a expressão 4.59 e o torque eletromagnético pela expressão 2.61. Assim, tem-se todas as informações presentes na equação de espaço-estado que está sendo integrada.

## 6. VALIDAÇÃO DO MODELO

De posse dos dois modelos já apresentados, o primeiro com base na teoria dos eixos de referência e mostrado nos capítulo 3 e 4, sub-capítulo 4.1, e o segundo com base nas equações de espaço-estado e mostrado no capítulo 4, sub-capítulo 4.2, faz-se necessário verificar se os mesmos representam a realidade, de forma que se possa utilizá-los para analisar a aplicação de motores trifásicos de indução em redes monofásicas.

Neste capítulo, por motivos de simplificação, o modelo com base na teoria dos eixos de referência será tratado por Modelo 1 e o modelo com base nas equações de espaço-estado será referido como Modelo 2.

Para validar os modelos apresentados, foram realizados ensaios com um motor de 1,5 kW (2 cv), 4 pólos, 220/380V, na carcaça 90S e com três diferentes valores para a capacitância: 15  $\mu$ F, 27  $\mu$ F e 60  $\mu$ F.

Primeiramente o motor foi submetido aos ensaios de rotor bloqueado e a vazio, alimentado com tensão trifásica, a fim de que os parâmetros de seu circuito equivalente pudessem ser calculados.

Os parâmetros do circuito equivalente obtidos foram:

- § resistência dos enrolamentos do estator  $r_s$  igual a 3,12  $\Omega$ ;
- § resistência dos enrolamentos do rotor referida ao estator  $r'_r$  igual a 3,25  $\Omega$ ;
- § reatância de dispersão dos enrolamentos do estator  $X_{ls}$  igual a 2,94  $\Omega$ ;
- § reatância de dispersão dos enrolamentos do rotor referida ao estator  $X'_{lr}$  igual a 2,94  $\Omega$ ;
- § reatância de magnetização dos enrolamentos do estator  $X_M$  igual a 110,1  $\Omega$ .

O momento de inércia do motor utilizado no ensaio é igual a 0,0056 kg.m<sup>2</sup>.

Os valores de desempenho do motor trifásico são mostrados na Tabela 6.1. O motor tem seis cabos e foi ligado em estrela.

Os ensaios do motor foram realizados com potência reduzida, pois, como será visto a seguir, neste tipo de aplicação as correntes são elevadas, o que causa um superaquecimento do motor. Os ensaios foram feitos com apenas 60% da potência nominal do motor.

|                    |               |
|--------------------|---------------|
| Potência           | 1,5 kW (2 cv) |
| Número de pólos    | 4             |
| Caixa              | 90S           |
| Tensão Nominal     | 380V          |
| Frequência Nominal | 60 Hz         |
| Rotação Nominal    | 1720 rpm      |
| Conjugado Nominal  | 8,2 N.m       |
| Rendimento         | 82,5%         |
| Fator de Potência  | 0.78          |
| Corrente Nominal   | 3.54 A        |

*Tabela 6.1. Dados do motor trifásico utilizado nos ensaios.*

Os resultados dos ensaios e das simulações dos dois modelos para o motor trifásico de indução alimentado por rede monofásica utilizando capacitor de 15  $\mu$ F, 27  $\mu$ F e 60  $\mu$ F, podem ser vistos nas tabelas 6.2, 6.3 e 6.4, respectivamente.

|                      | Ensaio | Modelo 1 | Modelo 2 |
|----------------------|--------|----------|----------|
| I <sub>bs</sub> [A]  | 3,1    | 3,2      | 2,8      |
| I <sub>cs</sub> [A]  | 2,1    | 2,0      | 2,0      |
| V <sub>cap</sub> [V] | 360    | 365      | 367      |
| Rendimento [%]       | 83,0   | ---      | ---      |
| Fator de potência    | 0,90   | ---      | ---      |

*Tabela 6.2. Comparação de resultados de ensaio e de simulação com capacitor de 15 mF.*

|                      | Ensaio | Modelo 1 | Modelo 2 |
|----------------------|--------|----------|----------|
| I <sub>bs</sub> [A]  | 3,0    | 2,7      | 2,7      |
| I <sub>cs</sub> [A]  | 4,3    | 4,0      | 4,0      |
| V <sub>cap</sub> [V] | 410    | 395      | 400      |
| Rendimento [%]       | 76,5   | ---      | ---      |
| Fator de potência    | 0,99   | ---      | ---      |

*Tabela 6.3. Comparação de resultados de ensaio e de simulação com capacitor de 27 mF.*



|                      | Ensaio | Modelo 1 | Modelo 2 |
|----------------------|--------|----------|----------|
| I <sub>bs</sub> [A]  | 6,8    | 7,4      | 8,3      |
| I <sub>cs</sub> [A]  | 10,7   | 9,9      | 10,1     |
| V <sub>cap</sub> [V] | 467    | 488      | 488      |
| Rendimento [%]       | 38,7   | ---      | ---      |
| Fator de potência    | 0,90   | ---      | ---      |

*Tabela 6.4. Comparação de resultados de ensaio e de simulação com capacitor de 60 mF.*

Nessas tabelas foram mostradas somente as correntes nas fases *b* e *c*. A corrente na fase *a* é uma combinação destas duas, conforme expressão 4.39. Vale lembrar que o capacitor está ligado entre as fases *a* e *c* do motor.

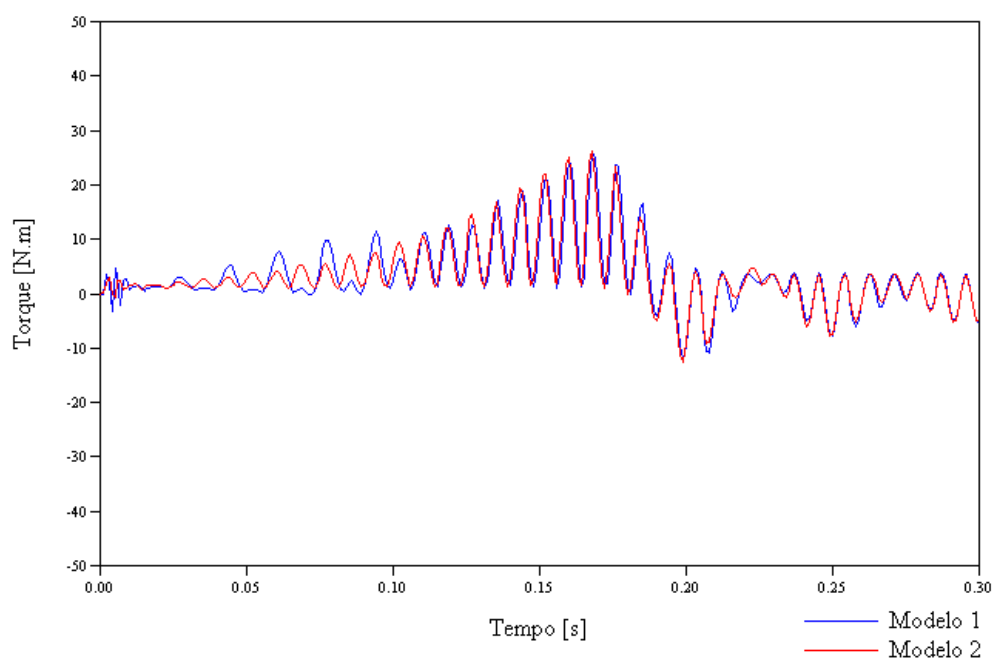
Pode-se perceber que as correntes são elevadas (lembrando que se está exigindo somente 60% do torque nominal do motor), chegando a 10,7 A na fase *c* com o capacitor de 60  $\mu$ F. Para este caso, a temperatura do motor ultrapassa os limites de temperatura da classe de isolamento, e, portanto, não é possível sua utilização prática.

Os fatores de potência e os rendimentos não foram calculados na simulação, devido à dificuldade em ler os valores corretamente a partir dos gráficos de corrente e tensão.

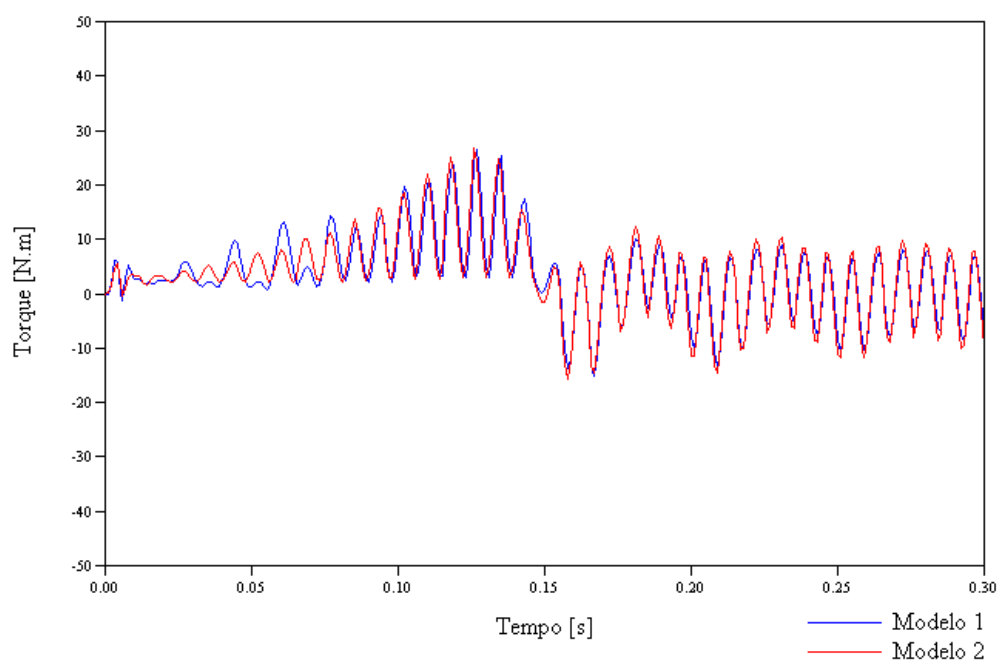
As curvas de torque do motor trifásico funcionando em rede monofásica, sem carga, obtidas da simulação do Modelo 1 e do Modelo 2, são mostradas nas figuras 6.1, 6.2 e 6.3, para 15  $\mu$ F, 27  $\mu$ F e 60  $\mu$ F respectivamente. Como pode ser visto, o motor apresenta grande oscilação no torque. Não foi possível medir as oscilações, mas de acordo com os estudos realizados por BADR et al. [3] e DE MENDONÇA [8], essas oscilações já eram esperadas. Além disso, KRAUSE et al. [2] mostram que desbalanceamentos nas tensões de alimentação de motores trifásicos causam pulsação no torque. O próprio motor monofásico, como mostra ALGER [9], apresenta, pela sua construção, essas oscilações.

A oscilação no torque aumenta com o aumento do valor da capacitância. Entretanto, quanto maior esse valor de capacitância, maior é o torque. Este fato pode ser melhor observado através do tempo de aceleração, ou seja, quanto maior o torque, mais rapidamente o motor atinge a estabilidade.

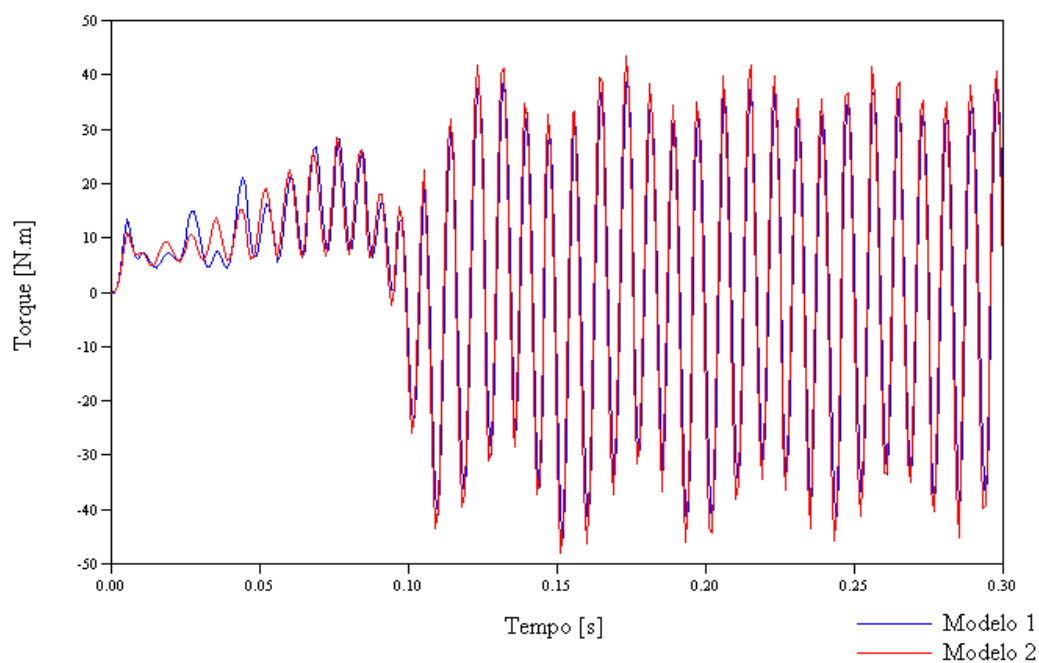
Do exposto acima, pode-se dizer que a escolha do valor da capacitância é uma solução de compromisso entre ter uma menor oscilação e um maior torque.



*Figura 6.1. Curva de torque a vazio com capacitância de 15 mF.*

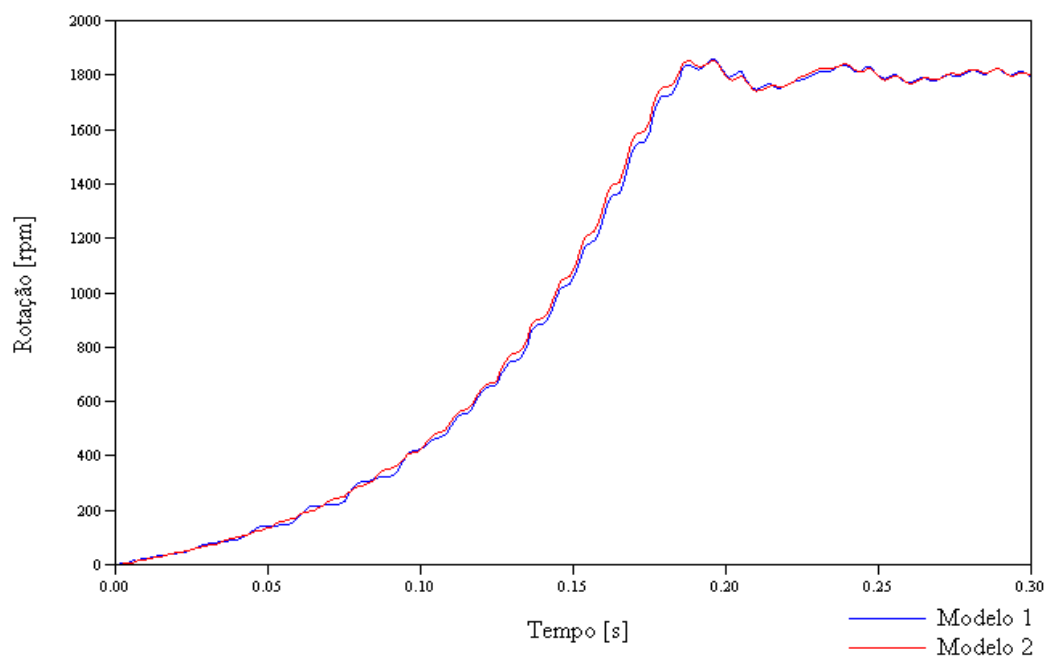


*Figura 6.2. Curva de torque a vazio com capacitância de 27 mF.*

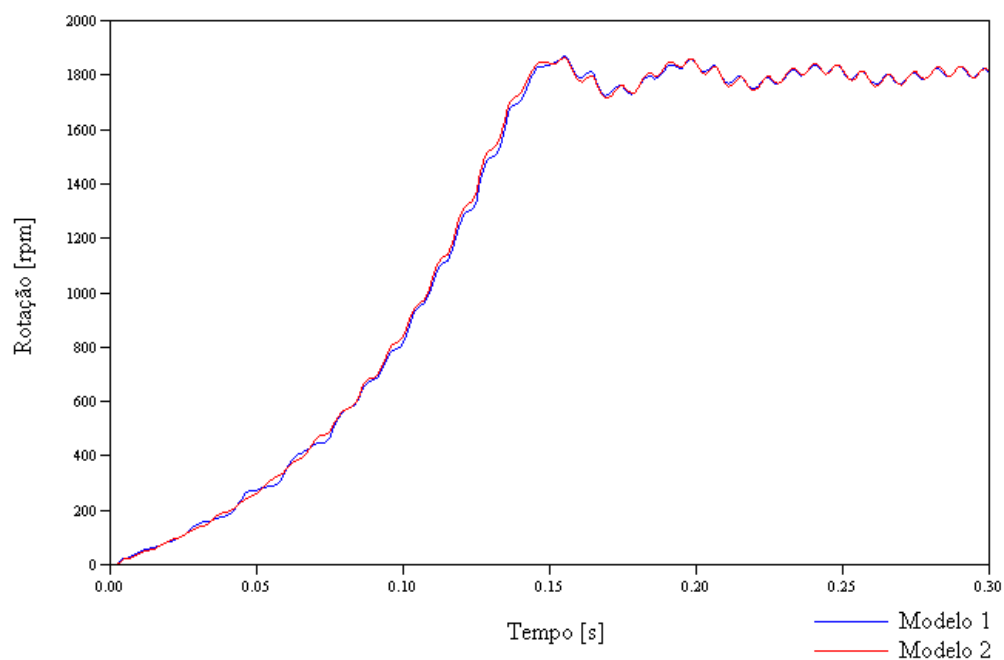


*Figura 6.3. Curva de torque a vazio com capacitância de 60 mF.*

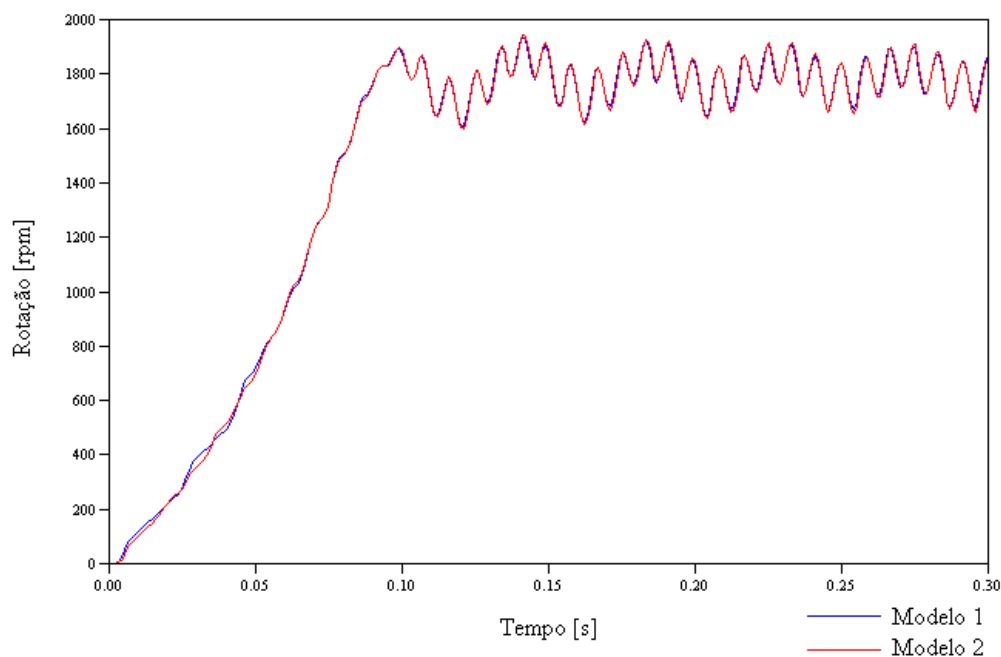
Devido ao momento de inércia do motor, as oscilações na velocidade não são tão acentuadas, como pode ser observado nas figuras 6.4, 6.5 e 6.6, para as capacitâncias de 15  $\mu\text{F}$ , 27  $\mu\text{F}$  e 60  $\mu\text{F}$ , respectivamente. Pode-se perceber também que a oscilação na rotação é tanto maior quanto maior for a capacitância.



*Figura 6.4. Curva de rotação para o motor com capacitância de 15 mF.*



*Figura 6.5. Curva de rotação para o motor com capacitância de 27 mF.*



*Figura 6.6. Curva de rotação para o motor com capacitância de 60 mF.*

As figuras 6.4, 6.5 e 6.6 foram obtidas também das simulações do Modelo 1 e do Modelo 2.

Obviamente, devido ao maior torque, o motor acelera mais rapidamente com o aumento da capacitância.

Observam-se também baixos torques. O conjugado máximo medido do motor foi de 12,1 N.m, enquanto que o conjugado máximo do motor trifásico normal chega a 26,1 N.m. Nos testes realizados, o motor não partiu sozinho com as capacitâncias de 15 e 27  $\mu\text{F}$ . Foi necessário embalá-lo manualmente.

A seguir são mostradas as curvas de corrente em cada enrolamento do motor e a curva de tensão no capacitor para cada capacitância (15  $\mu\text{F}$ , 27  $\mu\text{F}$  e 60  $\mu\text{F}$ ).

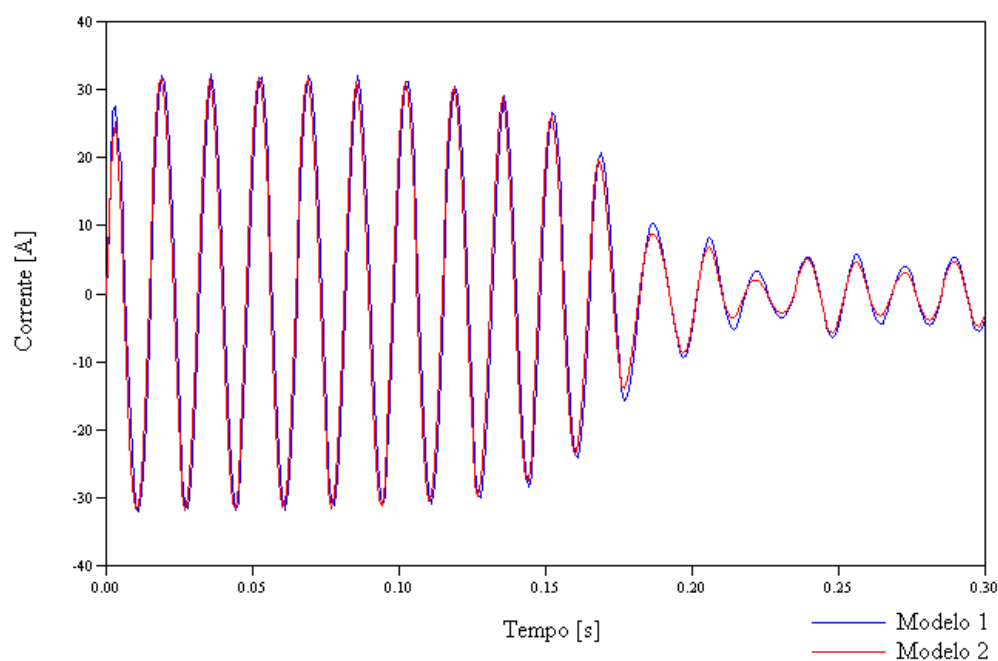


Figura 6.7. Curva da corrente  $i_{as}$  para o motor com capacitância de 15 mF.

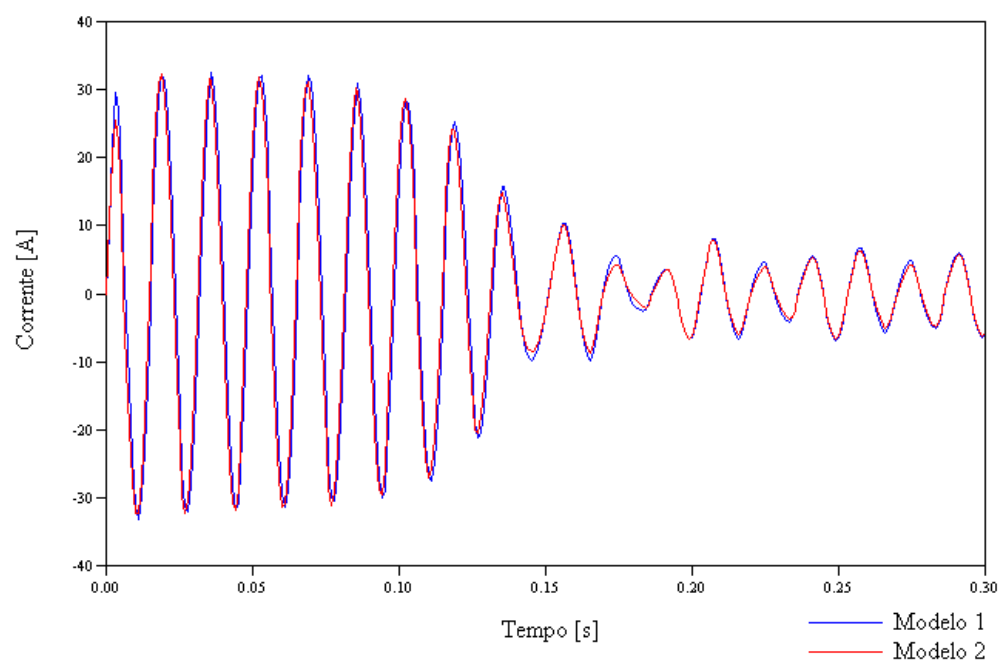


Figura 6.8. Curva da corrente  $i_{as}$  para o motor com capacitância de 27 mF.

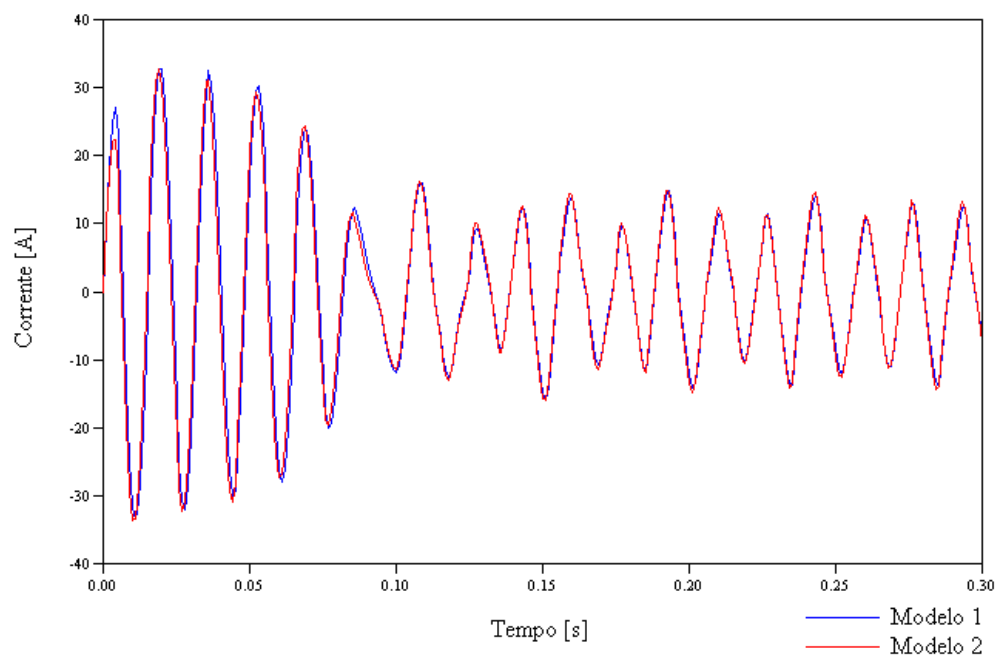


Figura 6.9. Curva da corrente  $i_{as}$  para o motor com capacitância de 60 mF.

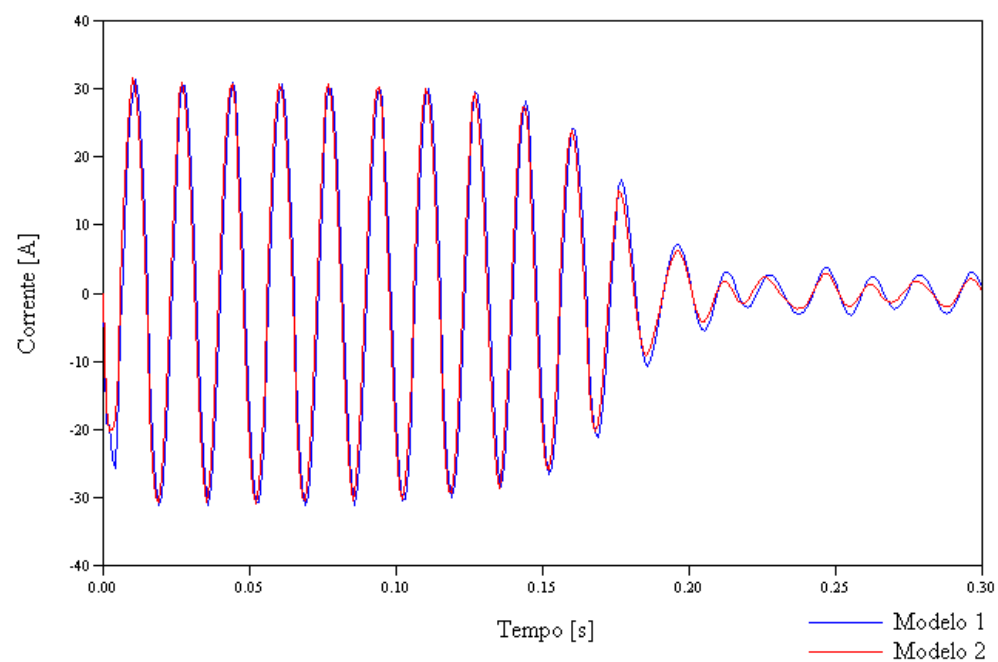


Figura 6.10. Curva da corrente  $i_{bs}$  para o motor com capacitância de 15 mF.

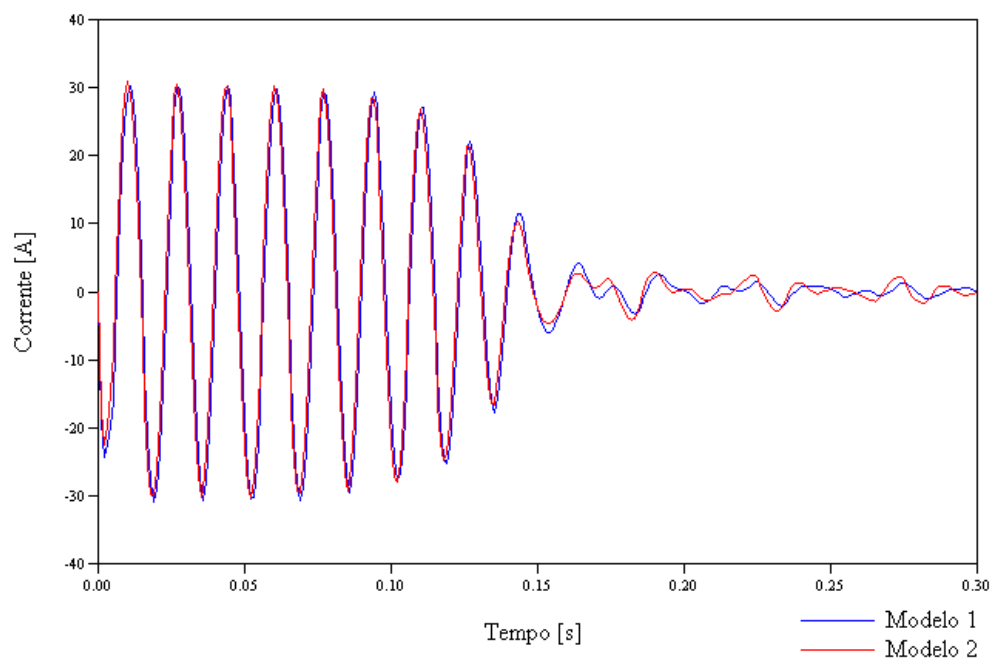


Figura 6.11. Curva da corrente  $i_{bs}$  para o motor com capacitância de 27 mF.

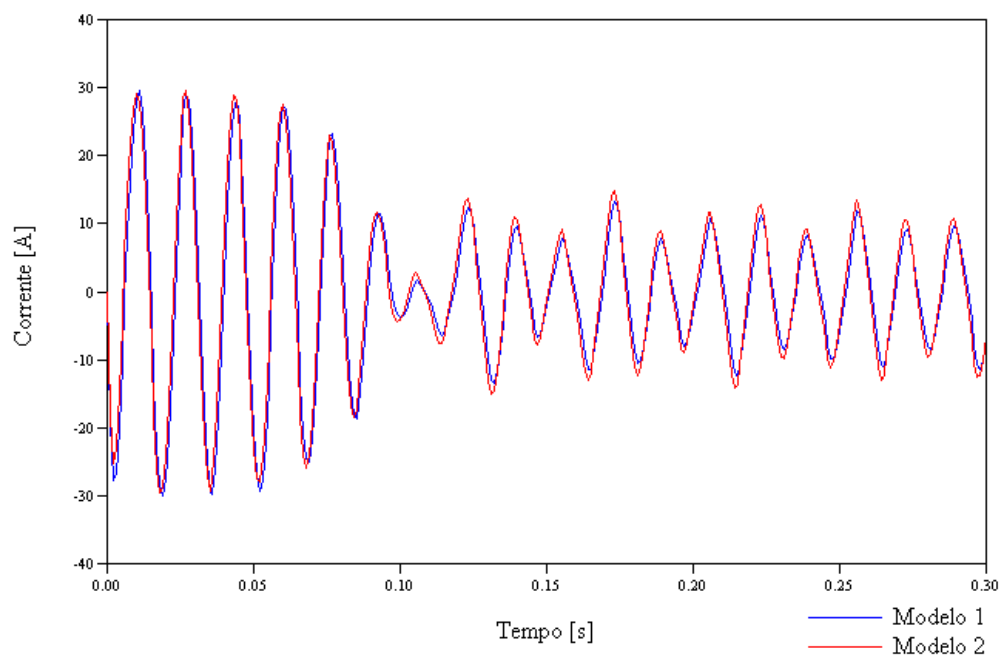


Figura 6.12. Curva da corrente  $i_{bs}$  para o motor com capacitância de 60 mF.



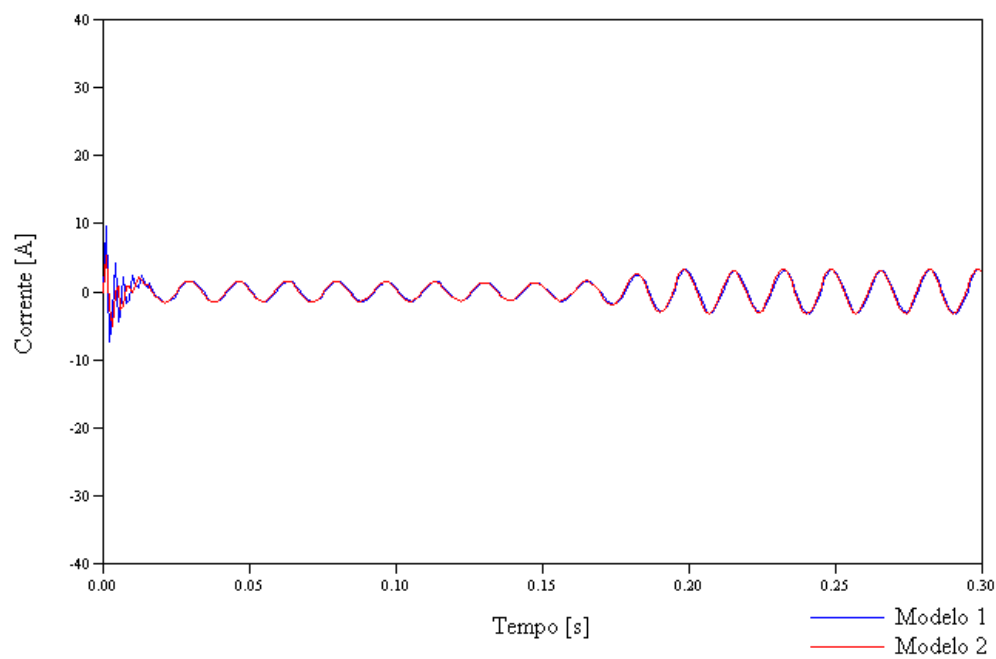


Figura 6.13. Curva da corrente  $i_{cs}$  para o motor com capacitância de 15 mF.

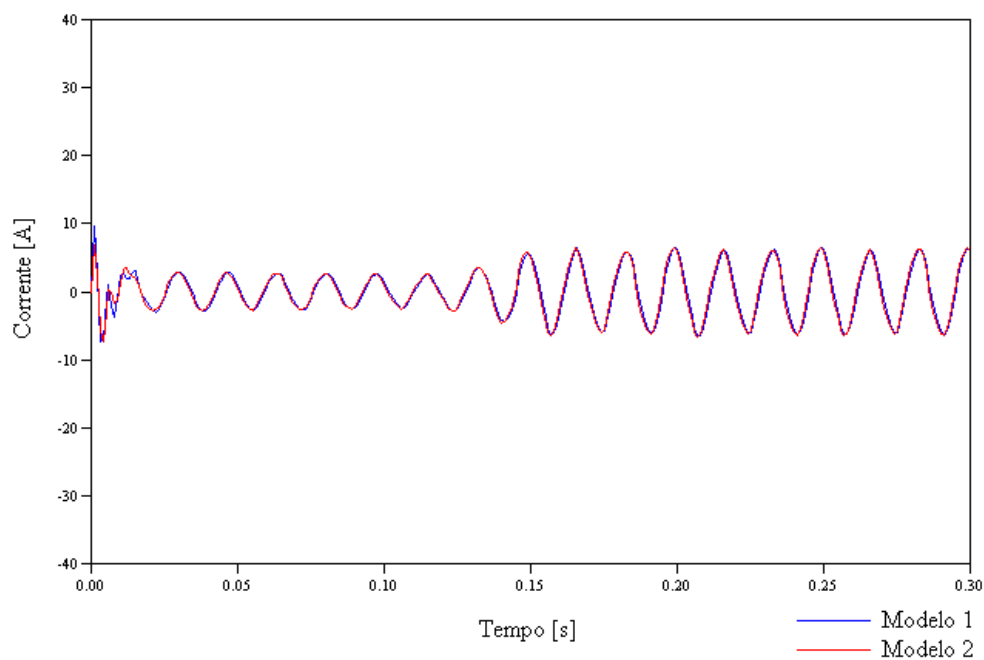


Figura 6.14. Curva da corrente  $i_{cs}$  para o motor com capacitância de 27 mF.

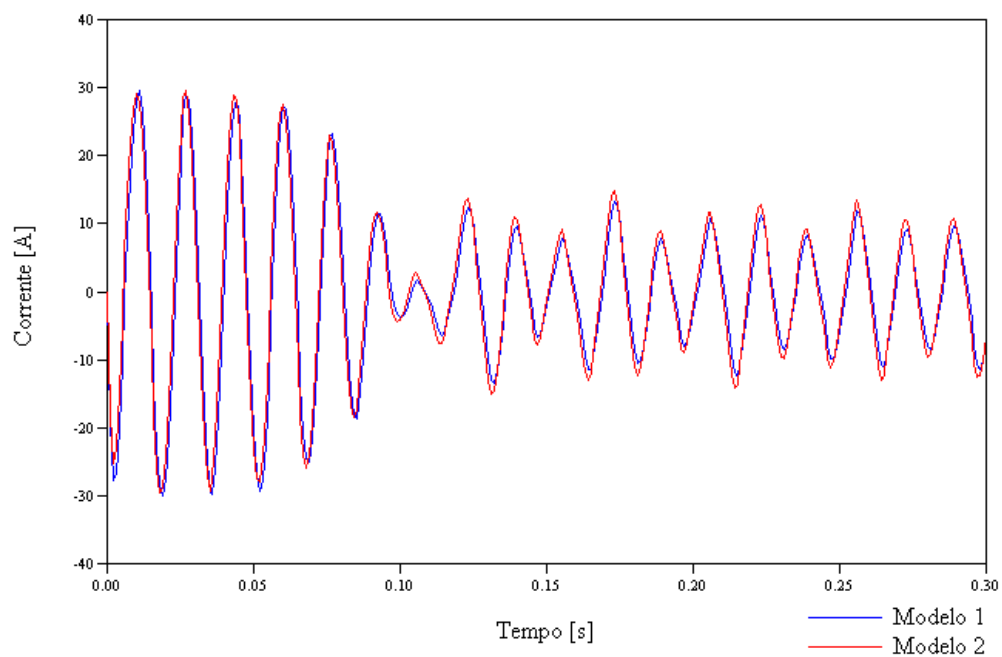


Figura 6.15. Curva da corrente  $i_{cs}$  para o motor com capacitância de 60 mF.

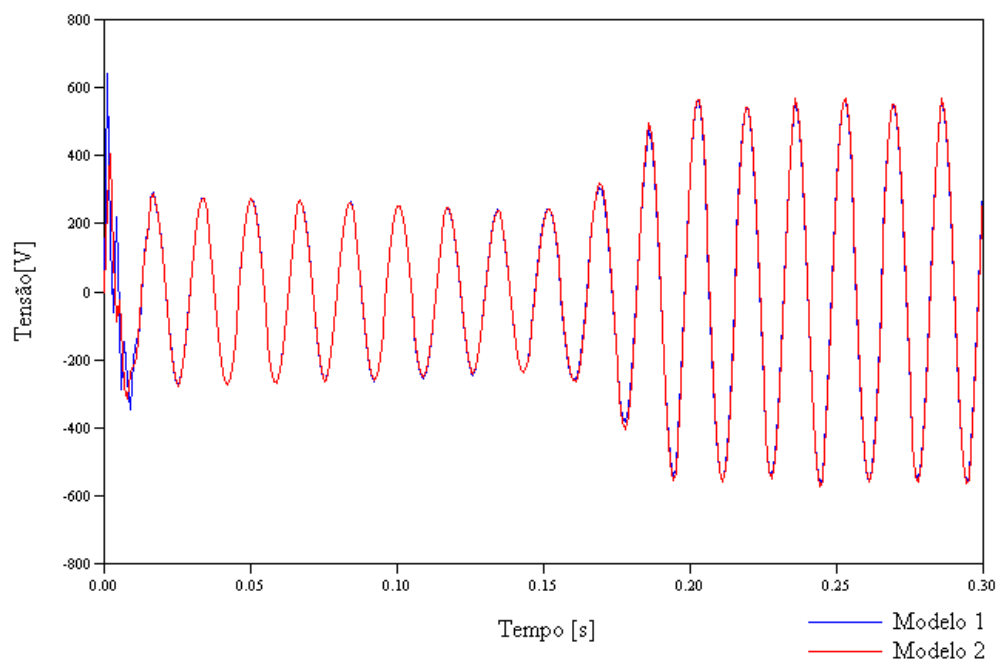


Figura 6.16. Curva da tensão no capacitor para o motor com capacitância de 15 mF.

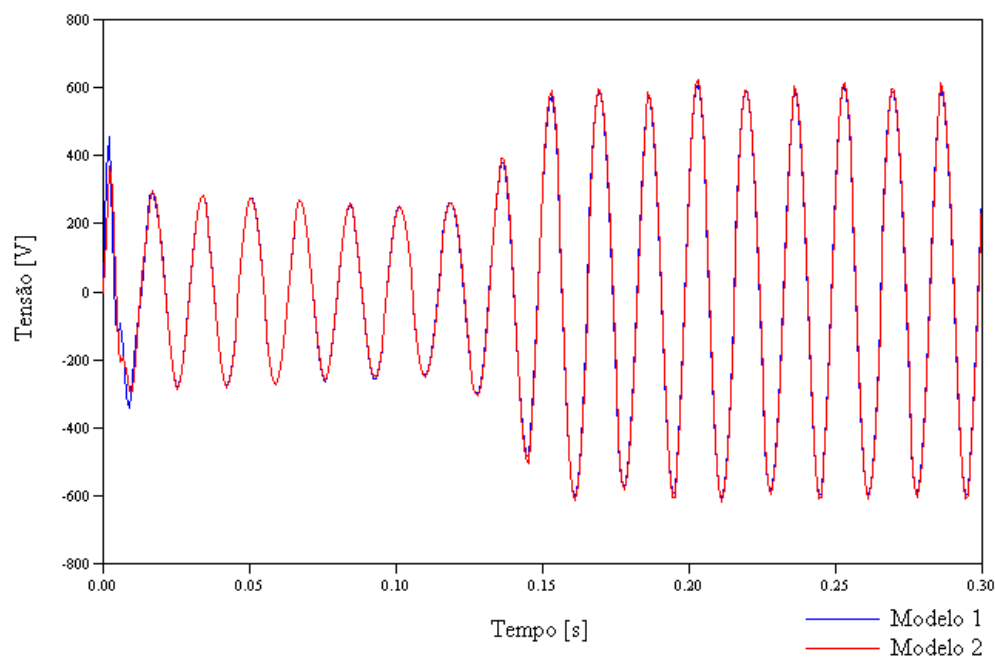


Figura 6.17. Curva da tensão no capacitor para o motor com capacitância de 27 mF.

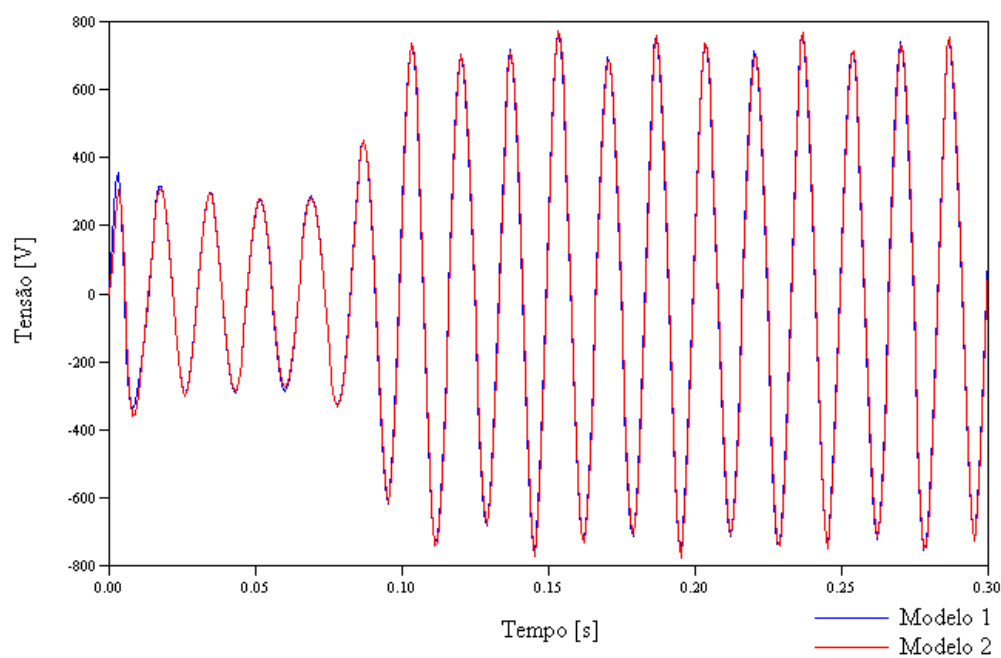
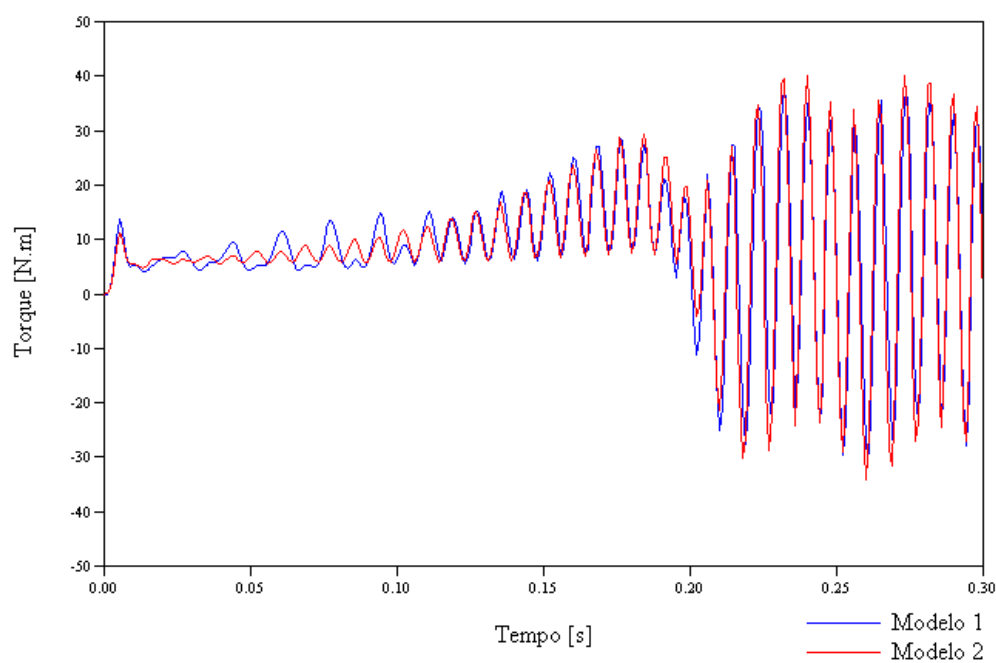


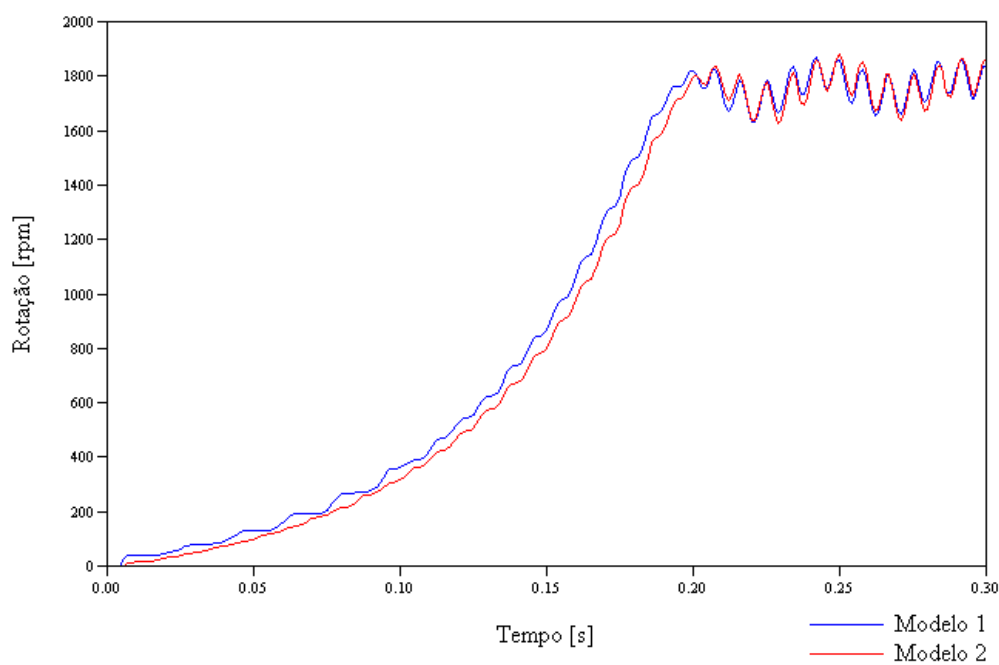
Figura 6.18. Curva da tensão no capacitor para o motor com capacitância de 60 mF.

As curvas de torque, de rotação, de correntes e de tensão no capacitor do motor com carga constante e igual a 60% do conjugado nominal do motor são mostradas nas

figuras 6.19 a 6.24. Foram utilizados os dois modelos com capacitor de  $60\ \mu\text{F}$ .



*Figura 6.19. Curva de torque do motor, com carga, para capacitor de  $60\ \text{mF}$ .*



*Figura 6.20. Curva de rotação do motor, com carga, para capacitor de  $60\ \text{mF}$ .*

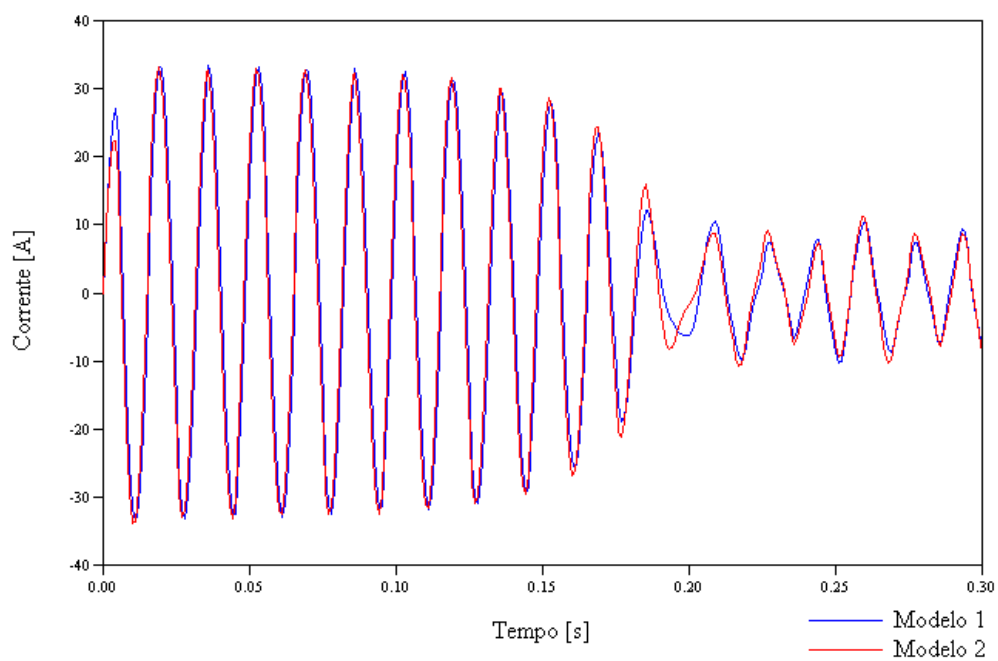


Figura 6.21. Curva da corrente  $i_{as}$  do motor, com carga, para capacitor de 60 mF.

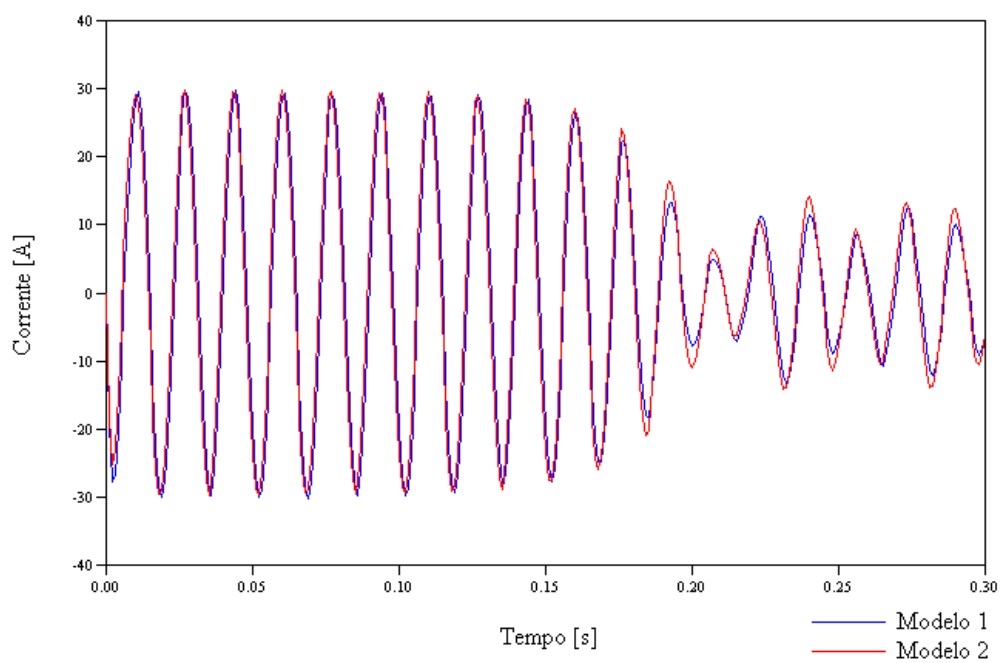


Figura 6.22. Curva da corrente  $i_{bs}$  do motor, com carga, para capacitor de 60 mF.

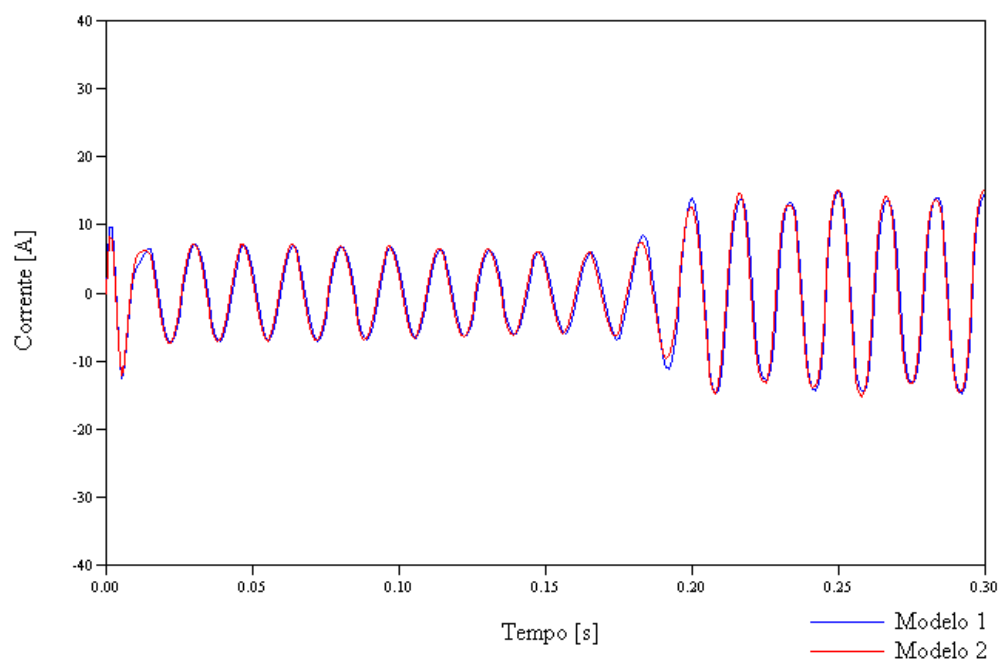


Figura 6.23. Curva da corrente  $i_{cs}$  do motor, com carga, para capacitor de 60 mF.

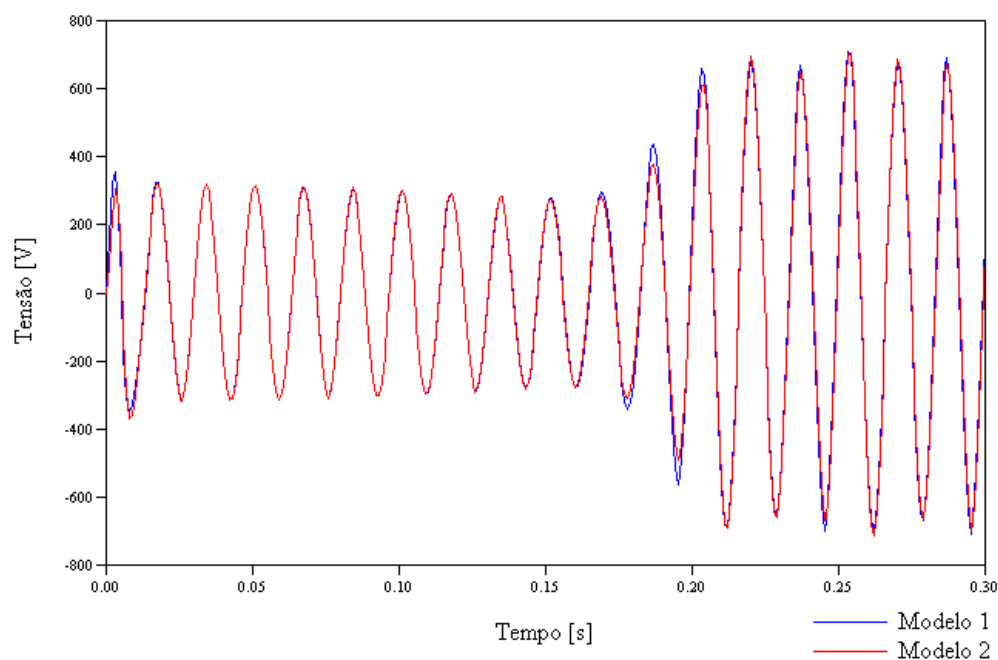


Figura 6.24. Curva da tensão no capacitor, com carga, para capacitor de 60 mF.

Como era de se esperar, o tempo de aceleração, ou o tempo que o motor leva para atingir o ponto de operação, é maior com carga.

Apesar de o Modelo 2 ser de mais fácil implementação que o Modelo 1, exigindo um número menor de linhas de código de programa, o tempo de simulação é maior no Modelo 2 que no Modelo 1, chegando a ser duas vezes mais lento.

Para efeito de comparação, na Tabela 6.5 são mostrados dados de dois motores monofásicos para utilização na zona rural. Os motores possuem capacitor de partida e capacitor permanente.

Os motores monofásicos cujos dados são mostrados na Tabela 6.5 foram escolhidos por apresentarem potências próximas daquela fornecida pelo motor trifásico alimentado por rede monofásica com a redução de potência já mencionada e assim permitirem alguma comparação.

O motor com capacitância de 15  $\mu\text{F}$  possui rendimento e fator de potência superiores aos dos motores monofásicos. O motor de 27  $\mu\text{F}$  possui rendimento próximo aos dos motores monofásicos e fator de potência praticamente unitário, o que não ocorre com os motores monofásicos. Já o motor de 60  $\mu\text{F}$  possui fator de potência superior aos dos motores monofásicos, mas seu rendimento é bastante baixo.

|                   |                |                 |
|-------------------|----------------|-----------------|
| Potência          | 0,75 kW (1 cv) | 1,1 kW (1,5 cv) |
| Número de Pólos   | 4              | 4               |
| Carcaça           | 90S            | 90L             |
| Tensão Nominal    | 220 V          | 220 V           |
| Frequência        | 60 Hz          | 60 Hz           |
| Rotação Nominal   | 1760 rpm       | 1760 rpm        |
| Conjugado Nominal | 3,99 N.m       | 5,98 N.m        |
| Rendimento        | 68,0 %         | 77,0 %          |
| Fator de Potência | 0,82           | 0,87            |
| Corrente Nominal  | 6,0 A          | 7,5 A           |

*Tabela 6.5 – Dados de motores monofásicos.*

Em termos de massa, o motor de indução trifásico é menos volumoso que os motores monofásicos, apresentando 22 kg contra 27 kg do motor monofásico de 0,75 kW e 30 kg do motor monofásico de 1,1 kW. Com relação ao custo, se dividirmos o custo do motor monofásico pelo custo do motor trifásico, será obtido o valor de 1,6 para o motor monofásico de 0,75 kW e 1,8 para o motor monofásico de 1,1 kW.

## 7. CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se a utilização do motor trifásico em rede monofásica e foram desenvolvidos dois modelos matemáticos para a análise desta utilização, um com base na teoria dos eixos de referência e outro com base nas equações de espaço-estado em variáveis de máquina.

Foram realizados ensaios para validar os modelos com três diferentes valores de capacitância. Os modelos mostraram-se satisfatórios. Os erros apresentados nos resultados das simulações em relação aos resultados dos ensaios podem ser atribuídos às simplificações adotadas nos mesmos, tais como não considerar a saturação e perdas magnéticas, e às aproximações na obtenção dos parâmetros do circuito equivalente do motor. Um ponto de melhoria seria a inclusão da saturação, uma vez que as tensões aplicadas aos enrolamentos podem ser superiores àsquelas de projeto.

Quanto à aplicação em si, a mesma mostrou-se bastante restrita, devido aos baixos conjugados (maiores quanto maior o valor da capacitância) e às oscilações apresentadas, sugerindo um outro ponto de melhoria: a otimização do valor da capacitância, para maximizar o torque sem aumentar demasiadamente a variação no mesmo e na rotação do motor. Outro ponto a ser avaliado é a viabilidade da utilização de motores maiores, talvez sendo necessário efetuar a partida do motor com um valor de capacitância e operá-lo com outro valor em regime.

Encontrando-se um valor de capacitância que permita a obtenção de um certo nível de conjugado que possibilite a partida sem auxílio externo, os conjugados baixos podem não ser um problema se as cargas a serem acionadas possuírem conjugados cujas curvas assemelham-se a parábolas. Nesse tipo de carga, o conjugado começa com valores baixos que aumentam com o aumento da velocidade. Esse é o caso de bombas e ventiladores, sendo as primeiras bastante comuns em zonas rurais, onde uma das principais aplicações de motores está nos sistemas de irrigação.

As vantagens do motor de indução trifásico sobre o motor de indução monofásico com respeito ao volume e ao custo acabam por serem minimizadas, uma vez que não se pode utilizar toda a potência fornecida pelo motor trifásico. Com a utilização de somente 60% da potência nominal do motor trifásico, este acaba sendo sobredimensionado para poder atender às solicitações da carga. Mesmo assim, ainda há uma vantagem significativa em termos de custo que justificariam a utilização do motor trifásico em redes monofásicas.



## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BARBI, I. *Teoria Fundamental do Motor de Indução*. 1. ed. Florianópolis : Editora da UFSC/ELETROBRÁS, 1985.
- [2] KRAUSE, P. C.; WASYNCZUK, O.; SUDHOFF, S. D. *Analysis of Electric Machinery*. 2. ed. New York : IEEE Press.
- [3] BADR. M. A.; ALOLAH, A. I.; ABDEL-HALIM, M. A. A Capacitor Start Three Phase Induction Motor. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, New York, v.10, n. 4, p.675-680, Dec. 1995.
- [4] NETO, L.M.; CAMACHO, J.R.; SALERNO, C.H. et al.; The Asymmetrical Three-Phase Induction Motor Fed by Single-Phase Source: Comparative Performance Analysis. INTERNATIONAL ELECTRICAL MACHINES AND DRIVES CONFERENCE (May 1997 : Milwaukee, Wisconsin, EUA). *Proceedings*. Milwaukee, 1997.
- [5] NETO, L.M.; CAMACHO, J.R.; ANDRADE, D.A. et al.; Single-Phase and Asymmetrical Three-Phase Induction Motors: A Comparative Steady-State Analysis Under Single-Phase Feeding. INTERNATIONAL CONFERENCE ON ELECTRICAL MACHINES (Sep. 1998 : Istambul, Turquia). *Proceedings*. Istambul, 1998.
- [6] NETO, L.M.; CAMACHO, J.R.; SALERNO, C.H. Analysis of a Three-Phase Induction Machine Including Time and Space Harmonic Effects: The A, B, C Reference Frame. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, New York, v. 14, n. 1, Mar. 1999.
- [7] SMITH, O. J. M. Large Low-Cost Single-Phase Semihex™ Motors. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 14, n. 4, p. 1353-1358, Dec. 1999.
- [8] DE MENDONÇA, R.G.; MARTINS NETO, L.; TEIXEIRA, H.B. et al.; Asymmetrical Three-Phase Induction Motor Performance Through the Use of Dynamic Capacitance Switching. INTERNATIONAL CONFERENCE ON ELECTRICAL MACHINES (Aug. 2000 : Helsinque, Finlândia). *Proceedings*. Helsinque, 2000.
- [9] ALGER, PHILIP L. *Induction Machines*. 2. ed. New York : Gordon and Breach Science Publishers.

## 9. APÊNDICE

Os programas utilizados na simulação são apresentados a seguir. Eles foram escritos para o software Scilab ([www.scilab.org](http://www.scilab.org)), em editores de texto simples, sem nenhuma formatação. Basta então executá-los no ambiente Scilab utilizando-se os comandos apropriados do mesmo.

### 9.1. Simulação através da teoria dos eixos de referência

Neste sub-capítulo são apresentados os programas escritos para o modelo que utiliza a teoria dos eixos de referência.

#### 9.1.1. Parâmetros do motor de indução trifásico e da carga

Os parâmetros do motor de indução trifásico foram colocados em arquivo à parte para facilitar a troca do método de simulação sem ter que carregar os dados novamente. Nada impede, no entanto, que as informações contidas neste arquivo sejam postas junto ao programa de simulação. O valor da capacitância mostrada é de 15  $\mu\text{F}$ .

```
Pb=2*746;      // Potência base (igual à potência nominal)
f=60;          // Frequência da rede
w=0;           // Velocidade dos eixos de referência
P=4;           // Número de polos
Rs=3.120;      // Resistência estatórica
Rr=3.249;      // Resistência rotórica
Xls=2.939;     // Reatância de dispersão do estator
Xlr=2.939;     // Reatância de dispersão do rotor
Xm=110.1;     // Reatância de magnetização
Jeq=0.00560;  // Inércia equivalente (rotor + carga)
Vl=380;       // Tensão de linha (rms)
TL=0;         // Torque da carga (N.m)
wb=2*pi*f;    // Velocidade angular em que foram
              // calculadas as reatâncias
C=0.000015;   // Capacitância
```

### 9.1.2. Programa de simulação

Após ler o arquivo com os parâmetros do motor, o programa que gerencia a simulação em si é executado. Ele carrega as equações dos enlaces de fluxo, da velocidade do motor e da tensão no capacitor de arquivos (listado mais adiante) e executa os passos discutidos no capítulo 6.

```
// Tensão máxima (de pico)
Vmax=Vl*sqrt(2);

Xss=Xls+Xm;
Xrr=Xlr+Xm;
D=Xss*Xrr-Xm^2;

Xa = 1/(1/Xm+1/Xls+1/Xlr);

// Enlaces de fluxo
Fqs(1)=0;
Fds(1)=0;
Fos(1)=0;
Fqr(1)=0;
Fdr(1)=0;
For(1)=0;
// Correntes
iqs(1)=0;
ids(1)=0;
ios(1)=0;
iqr(1)=0;
idr(1)=0;
ior(1)=0;

t(1)=0;
wr(1)=0;
tetar(1)=0;
Tem(1)=0;

passo=0.001;

getf('c:\simulacao\enlace_park.sci')
```

```

getf('c:\simulacao\velocidade_park.sci')
getf('c:\simulacao\capacitor_park.sci')

Vqdor=[0;0;0];

vcap(1)=0;

vs=Vmax*cos(2*pi*f*t(1));

vas(1)=+(1/3)*vs+(1/3)*vcap(1);
vbs(1)=-(2/3)*vs+(1/3)*vcap(1);
vcs(1)=+(1/3)*vs-(2/3)*vcap(1);

ias(1)=0;
ibs(1)=0;
ics(1)=0;
iar(1)=0;
ibr(1)=0;
icr(1)=0;

// Matriz de transformação abcs -> qdos
Ks = (2/3) * [cos(w*t(1)) cos(w*t(1)-2*pi/3) cos(w*t(1)+2*pi/3);
              sin(w*t(1)) sin(w*t(1)-2*pi/3) sin(w*t(1)+2*pi/3);
              1/2          1/2          1/2          ];

// Matriz de transformação qdos -> abcs
Ksi = [cos(w*t(1))      sin(w*t(1))      1;
        cos(w*t(1)-2*pi/3) sin(w*t(1)-2*pi/3) 1;
        cos(w*t(1)+2*pi/3) sin(w*t(1)+2*pi/3) 1];

tfinal = 0.5;

iteracoes = tfinal/passo;

timer();

for i=2:1:iteracoes

    Vqdos = Ks * [vas(i-1); vbs(i-1); vcs(i-1)];
    ti=t(i-1):passo:t(i-1)+passo;

```

```

wri=wr(i-1);
tetari=tetar(i-1);
// As duas linhas seguintes são, na realidade, uma só.
y=ode([Fqs(i-1);Fds(i-1);Fos(i-1);Fqr(i-1);Fdr(i-1);For(i-1)],t(i-
1),ti,enlace);

Fqs(i)=y(1,2);
Fds(i)=y(2,2);
Fos(i)=y(3,2);
Fqr(i)=y(4,2);
Fdr(i)=y(5,2);
For(i)=y(6,2);

Fmq=Xa*(Fqs(i)/Xls+Fqr(i)/Xlr);
Fmd=Xa*(Fds(i)/Xls+Fdr(i)/Xlr);

iqs(i) = (1/Xls)*(Fqs(i)-Fmq);
ids(i) = (1/Xls)*(Fds(i)-Fmd);
ios(i) = (1/Xls)*Fos(i);

Iqdos = [iqs(i);ids(i);ios(i)];

iqr(i) = (1/Xlr)*(Fqr(i)-Fmq);
idr(i) = (1/Xlr)*(Fdr(i)-Fmd);
ior(i) = (1/Xlr)*For(i);

Iqdor = [iqr(i);idr(i);ior(i)];

// Matriz de transformacao abcr -> qdor
Kr=(2/3)*[cos(w*t(i-1)-tetari) cos(w*t(i-1)-tetari-2*pi/3)
          cos(w*t(i-1)-tetari+2*pi/3);//Continuação da linha anterior
          sin(w*t(i-1)-tetari) sin(w*t(i-1)-tetari-2*pi/3)
          sin(w*t(i-1)-tetari+2*pi/3);//Continuação da linha anterior
          1/2                      1/2
          1/2                      ];//Continuação da linha anterior

// Matriz de transformacao qdor -> abcr

```

```

Kri=[cos(w*t(i-1)-tetari)      sin(w*t(i-1)-tetari)      1;
      cos(w*t(i-1)-tetari-2*pi/3) sin(w*t(i-1)-tetari-2*pi/3) 1;
      cos(w*t(i-1)-tetari+2*pi/3) sin(w*t(i-1)-tetari+2*pi/3) 1];

Iabcs=Ksi*Iqdos;
Iabcr=Kri*Iqdor;

ias(i)=Iabcs(1);
ibs(i)=Iabcs(2);
ics(i)=Iabcs(3);

iar(i)=Iabcr(1);
ibr(i)=Iabcr(2);
icr(i)=Iabcr(3);

Temi=(3/2)*(P/2)*(Xm/(D*wb))*(Fqs(i)*Fdr(i)-Fqr(i)*Fds(i));

Tem(i) = Temi;

ti=t(i-1):passo:t(i-1)+passo;

y=ode([wri;tetari],t(i-1),ti,velocidade);

wr(i)=y(1,2);
tetar(i)=y(2,2);

ic=ics(i);

ti=t(i-1):passo:t(i-1)+passo;

y=ode([vcap(i-1)],t(i-1),ti,capacitor);

vcap(i)=y(1,2);

t(i)=t(i-1)+passo;

vs=Vmax*cos(2*pi*f*t(i));

vas(i)=+(1/3)*vs+(1/3)*vcap(i);

```

```

vbs(i)=-(2/3)*vs+(1/3)*vcap(i);
vcs(i)=+(1/3)*vs-(2/3)*vcap(i);

// Matriz de transformação abcs -> qdos
Ks = (2/3) * [cos(w*t(i)) cos(w*t(i)-2*pi/3) cos(w*t(i)+2*pi/3);
              sin(w*t(i)) sin(w*t(i)-2*pi/3) sin(w*t(i)+2*pi/3);
              1/2          1/2          1/2          ];

// Matriz de transformação qdos -> abcs
Ksi = [cos(w*t(i))      sin(w*t(i))      1;
       cos(w*t(i)-2*pi/3) sin(w*t(i)-2*pi/3) 1;
       cos(w*t(i)+2*pi/3) sin(w*t(i)+2*pi/3) 1];

end

timer()

```

### 9.1.3. Equações dos enlaces de fluxo

As equações dos enlaces de fluxo são definidas como função (em um arquivo externo), carregadas no programa de simulação e integradas.

```

function [xdot]=enlace(t,x)
// x(1) - enlace de fluxo do estator para o eixo em quadratura.
// x(2) - enlace de fluxo do estator para o eixo direto.
// x(3) - enlace de fluxo do estator para o eixo "0"
// x(4) - enlace de fluxo do rotor para o eixo em quadratura.
// x(5) - enlace de fluxo do rotor para o eixo direto.
// x(6) - enlace de fluxo do rotor para o eixo "0"
Fmq=Xa*(x(1)/Xls+x(4)/Xlr);
Fmd=Xa*(x(2)/Xls+x(5)/Xlr);
xdot(1) = wb*(Vqdos(1)-(w/wb)*x(2)+(Rs/Xls)*(Fmq-x(1)));
xdot(2) = wb*(Vqdos(2)+(w/wb)*x(1)+(Rs/Xls)*(Fmd-x(2)));
xdot(3) = wb*(Vqdos(3)-(Rs/Xls)*x(3));
xdot(4) = wb*(Vqdor(1)-((w-wri)/wb)*x(5)+(Rr/Xlr)*(Fmq-x(4)));
xdot(5) = wb*(Vqdor(2)+((w-wri)/wb)*x(4)+(Rr/Xlr)*(Fmd-x(5)));
xdot(6) = wb*(Vqdor(3)-(Rr/Xlr)*x(6));

```

#### 9.1.4. Equação de velocidade

A equação de velocidade é também definida como função (em arquivo externo), carregada pelo programa de simulação e integrada.

```
function [xdot]=velocidade(t,x)
// x(1) - velocidade angular (eletrica) do rotor (wr).
//      wr=(P/2)*wm, onde wm é a velocidade angular
//      do eixo (mecânica) e P o número de pólos.
// x(2) - ângulo (elétrico) do rotor.
xdot(1) = (Temi - TL)*(P/2)/Jeq;
xdot(2) = x(1);
```

#### 9.1.5. Equação da tensão no capacitor

A equação da tensão no capacitor é também definida como função (em arquivo externo), carregada pelo programa de simulação e integrada.

```
function [xdot]=capacitor(t,x)
// Xc - impedância do capacitor
// ic - corrente do capacitor
xdot=ic/C;
```

### 9.2. Simulação em variáveis de máquina

Neste subcapítulo são apresentados os programas escritos para o modelo que utiliza as equações de espaço-estado.

#### 9.2.1. Parâmetros do motor de indução trifásico

São utilizados os mesmos valores do sub-capítulo 11.1.1.



### 9.2.2. Programa de simulação

```

getf('c:\simulacao\equacao_espaco_estado.sci')

Lls=Xls/wb;
Llr=Xlr/wb;
Lms=(2/3)*Xm/wb;

Ls=Lls+Lms;
Lr=Lls+Lms;
Ms=-0.5*Lms;
Mr=-0.5*Lms;

// Matriz das resistências
R=[2*Rs  Rs 0  0  0;
   Rs -Rs 0  0  0;
   0  0  Rr 0  0;
   0  0  0  Rr 0;
   0  0  0  0  Rr];

passo=0.001;
tinicial = 0;
tfinal=1;
iteracoes=tfinal/passo;

// Definicao dos tempos
t=tinicial:passo:tfinal;

timer();

// Integrar para obter correntes
y=ode([0;0;0;0;0;0;0;0;0],tinicial,t,equacao);

exec('c:\simulacao\torque_espaco_estado.sci');

timer()

```

### 9.2.3. Equações do motor

```

function [xdot]=equacao(t,x)
// x(1) - corrente na fase a do estator
// x(2) - corrente na fase c do estator
// x(3) - corrente na fase a do rotor
// x(4) - corrente na fase b do rotor
// x(5) - corrente na fase c do rotor
// x(6) - tensao no capacitor
// x(7) - velocidade angular do rotor
// x(8) - angulo do rotor
Msara=Lms*cos(x(8));
Msarb=Lms*cos(x(8)+2*pi/3);
Msarc=Lms*cos(x(8)-2*pi/3);
Msbra=Lms*cos(x(8)-2*pi/3);
Msbrb=Lms*cos(x(8));
Msbrc=Lms*cos(x(8)+2*pi/3);
Mscra=Lms*cos(x(8)+2*pi/3);
Mscrb=Lms*cos(x(8)-2*pi/3);
Mscrc=Lms*cos(x(8));

// Montagem da matriz dLsr (já referida ao estator),
// derivada da matriz Lsr, a ser usada no cálculo
// do conjugado
dMsara=-Lms*sin(x(8));
dMsarb=-Lms*sin(x(8)+2*pi/3);
dMsarc=-Lms*sin(x(8)-2*pi/3);
dMsbra=-Lms*sin(x(8)-2*pi/3);
dMsbrb=-Lms*sin(x(8));
dMsbrc=-Lms*sin(x(8)+2*pi/3);
dMscra=-Lms*sin(x(8)+2*pi/3);
dMscrb=-Lms*sin(x(8)-2*pi/3);
dMscrc=-Lms*sin(x(8));

// Monstagem da matriz L de indutâncias
L=[2*(Ls-Ms)      (Ls-Ms)      (Msara-Msbra) (Msarb-Msbrb) (Msarc-Msbrc);
    (Ls-Ms)      (Ms-Ls)      (Msara-Mscra) (Msarb-Mscrb) (Msarc-Mscrc);
    (Msara-Msbra) (Mscra-Msbra) Lr          Mr          Mr;
    (Msarb-Msbrb) (Mscrb-Msbrb) Mr          Lr          Mr;
    (Msarc-Msbrc) (Mscrc-Msbrc) Mr          Mr          Lr];

```

```

// Calculo da inversa da matriz L
invL=inv(L);

dL(1,1) = 0;
dL(1,2) = 0;
dL(1,3) = (dMsara-dMsbra);
dL(1,4) = (dMsarb-dMsbrb);
dL(1,5) = (dMsarc-dMsbrc);
dL(2,1) = 0;
dL(2,2) = 0;
dL(2,3) = (dMsara-dMscra);
dL(2,4) = (dMsarb-dMscrb);
dL(2,5) = (dMsarc-dMscrc);
dL(3,1) = (dMsara-dMsbra);
dL(3,2) = (dMscra-dMsbra);
dL(3,3) = 0;
dL(3,4) = 0;
dL(3,5) = 0;
dL(4,1) = (dMsarb-dMsbrb);
dL(4,2) = (dMscrb-dMsbrb);
dL(4,3) = 0;
dL(4,4) = 0;
dL(4,5) = 0;
dL(5,1) = (dMsarc-dMsbrc);
dL(5,2) = (dMscrc-dMsbrc);
dL(5,3) = 0;
dL(5,4) = 0;
dL(5,5) = 0;

D=-invL*(x(7)*dL+R);

vs=Vl*sqrt(2)*cos(wb*t);

dLsr = [dMsara dMsarb dMsarc;
        dMsbra dMsbrb dMsbrc;
        dMscra dMscrb dMscrc];

Tem=(P/2)*[x(1) -x(1)-x(2) x(2)]*dLsr*[x(3); x(4); x(5)];

```

```

U(1)=-vs;
U(2)=0;
U(3)=0;
U(4)=0;
U(5)=0;
U(6)=0;
U(7)=(Tem - TL)*(P/2)/Jeq;
U(8)=0;

A=[D zeros(5,3); zeros(3,5) zeros(3,3)];
A(1,6)=invL(1,2);
A(2,6)=invL(2,2);
A(3,6)=invL(3,2);
A(4,6)=invL(4,2);
A(5,6)=invL(5,2);
A(6,2)=1/C;
A(8,7)=1;

B=[invL zeros(5,3); zeros(3,5) zeros(3,3)];
B(7,7)=1;

xdot=A*x+B*U;

```

#### 9.2.4. Cálculo do torque

Como no Scilab os dados de uma função não estão disponíveis fora dela, tem-se que recalcular o conjugado.

```

for i=1:1:iteracoes+1
    dMsara=-Lms*sin(y(8,i));
    dMsarb=-Lms*sin(y(8,i)+2*%pi/3);
    dMsarc=-Lms*sin(y(8,i)-2*%pi/3);
    dMsbra=-Lms*sin(y(8,i)-2*%pi/3);
    dMsbrb=-Lms*sin(y(8,i));
    dMsbrc=-Lms*sin(y(8,i)+2*%pi/3);
    dMscra=-Lms*sin(y(8,i)+2*%pi/3);
    dMscrb=-Lms*sin(y(8,i)-2*%pi/3);
    dMscrc=-Lms*sin(y(8,i));

```

```

dLc = [dMsara dMsarb dMsarc;
       dMsbra dMsbrb dMsbrc;
       dMscra dMscrb dMscrc];

Tem(i)=(P/2)*[y(1,i) -y(1,i)-y(2,i) y(2,i)]*dLc*[y(3,i); y(4,i);
            y(5,i)]; //Continuação da linha anterior
end

```